longseller

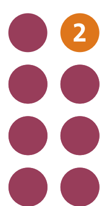


Matemática

Funciones 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

longseller



Matemática

Funciones 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Dirección editorial
Verónica Parada

Dirección pedagógica
Rosa Rottemberg

Dirección de arte
Paula Lanzillotti

Edición
Nora Legorburu

Diseño gráfico
Gabriela Feldman

Corrección
Inés Gugliotella
Silvia Cacchione

Ilustración de tapa e interiores
Doma

Ilustraciones
Doma
Jorge Martínez

Gráficos
Natalia Fernández
Gabriela Feldman

Fotografía
Ángela Corbalán
Bioimagen
Archivo Longseller
El Correo de la UNESCO

Fotocromía
Longseller S.A.

Las autoras agradecen a la profesora Patricia Sadovsky por sus enseñanzas y su apoyo incondicional.

Casa matriz: Av. San Juan 777
(C1147AAF)
Ciudad de Buenos Aires, Argentina
Teléfono y fax: (5411) 5031-5400
E-mail: educacion@longseller.com.ar
www.longseller.com.ar

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11723.

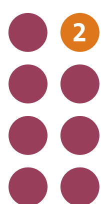
Libro de edición argentina.

Comparatore, Claudia Rita
Matemática 2 funciones 2 / Claudia Rita Comparatore ; Silvia Viviana Altman ; Liliana Edith Kurzrok. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Longseller, 2015. - (Libros temáticos)
E-Book.

ISBN 978-987-683-331-8

1. Matemática. I. Altman, Silvia Viviana II. Kurzrok, Liliana Edith
CDD 510.071 2

longseller



Matemática

Funciones 2

Silvia V. Altman
Profesora de Matemática y Astronomía, INSP "Joaquín V. González".
Ganadora del Subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994).
Docente en escuelas medias.

Claudia R. Comparatore
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires.
Ganadora del Subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994).
Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.

Liliana E. Kurzrok
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires.
Profesora de Matemática, ORT Formación docente para profesionales.
Becaria de Investigación, Conicet, UBA.
Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.

Cómo leer este libro

Problemas

Al comenzar cada capítulo, y para introducir los contenidos, se presentan uno o más problemas para resolver y discutir en grupos, que se identifican con el ícono .

Posible resolución

Se presenta un posible camino para resolver cada uno de los problemas propuestos. Permite confrontar diferentes procedimientos y verificar las soluciones obtenidas. Se identifica con el ícono .

Algo más…

Se presentan comentarios y aclaraciones sobre los temas desarrollados.

¿Sabían que…?

Se presentan biografías, reseñas históricas y datos de interés que enriquecen los contenidos.

Textos recuadrados

Aquí se incluyen definiciones para que puedan ser localizadas rápidamente cuando se necesita consultarlas.

Actividades

Se proponen actividades que sirven para verificar la comprensión de los contenidos abordados y la aplicación de éstos en distintas situaciones.

¿Cómo se lee…?

Se ofrece el significado de los símbolos utilizados en la página.

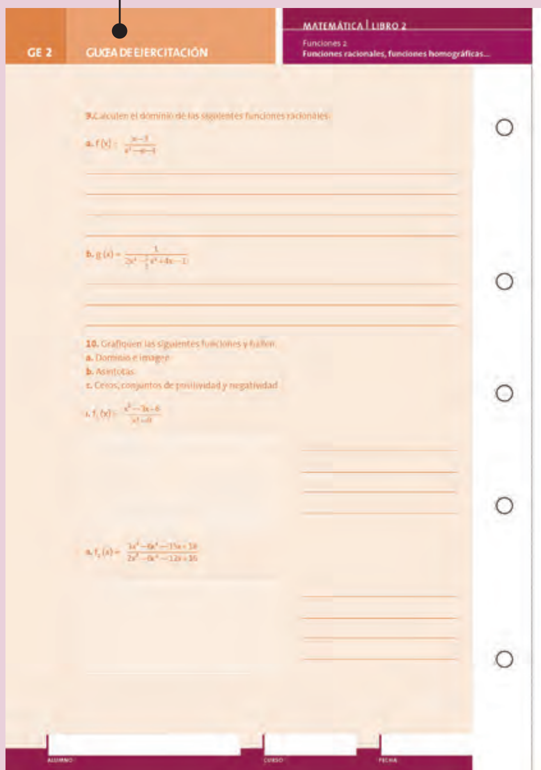
Guía de ejercitación

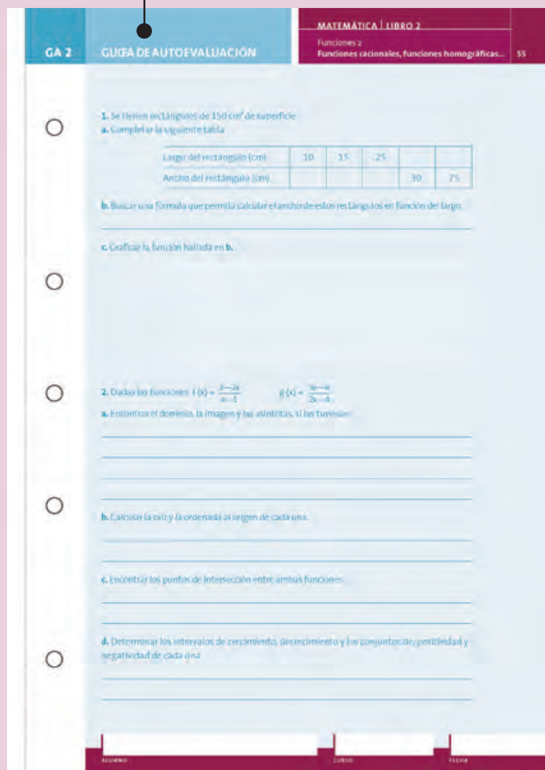
Incluye actividades orientadas a poner en juego todos los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo del capítulo.

Guía de autoevaluación

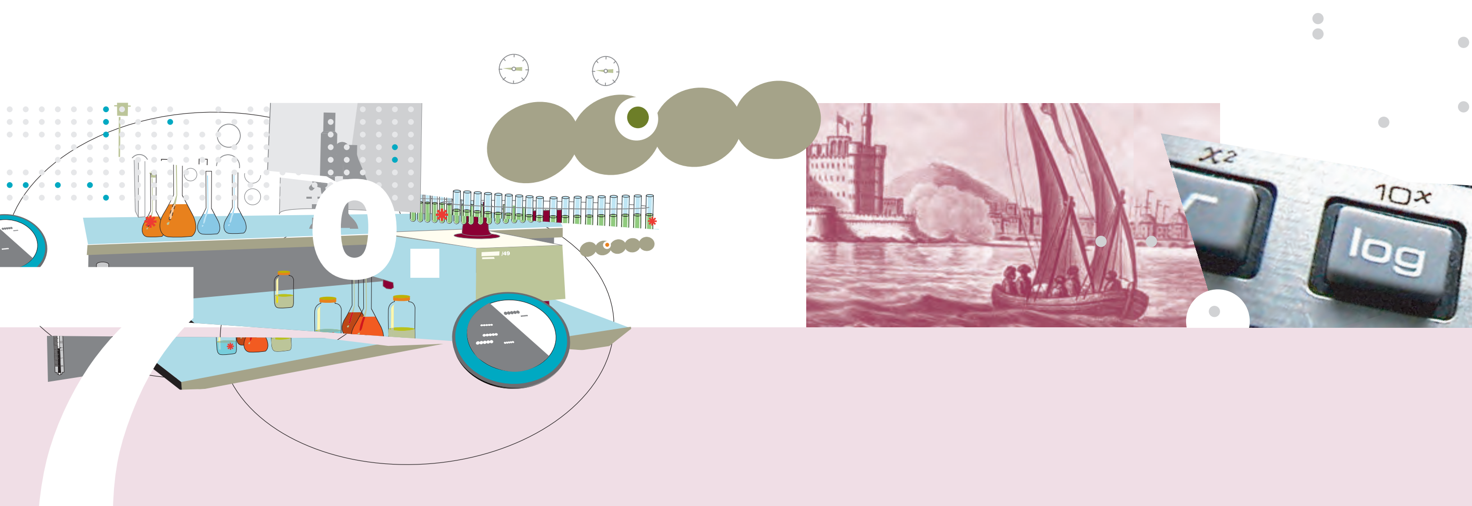
Contiene actividades que pueden ser resueltas al finalizar el capítulo para autoevaluar lo aprendido.

Se incluyen las respuestas al final del libro.





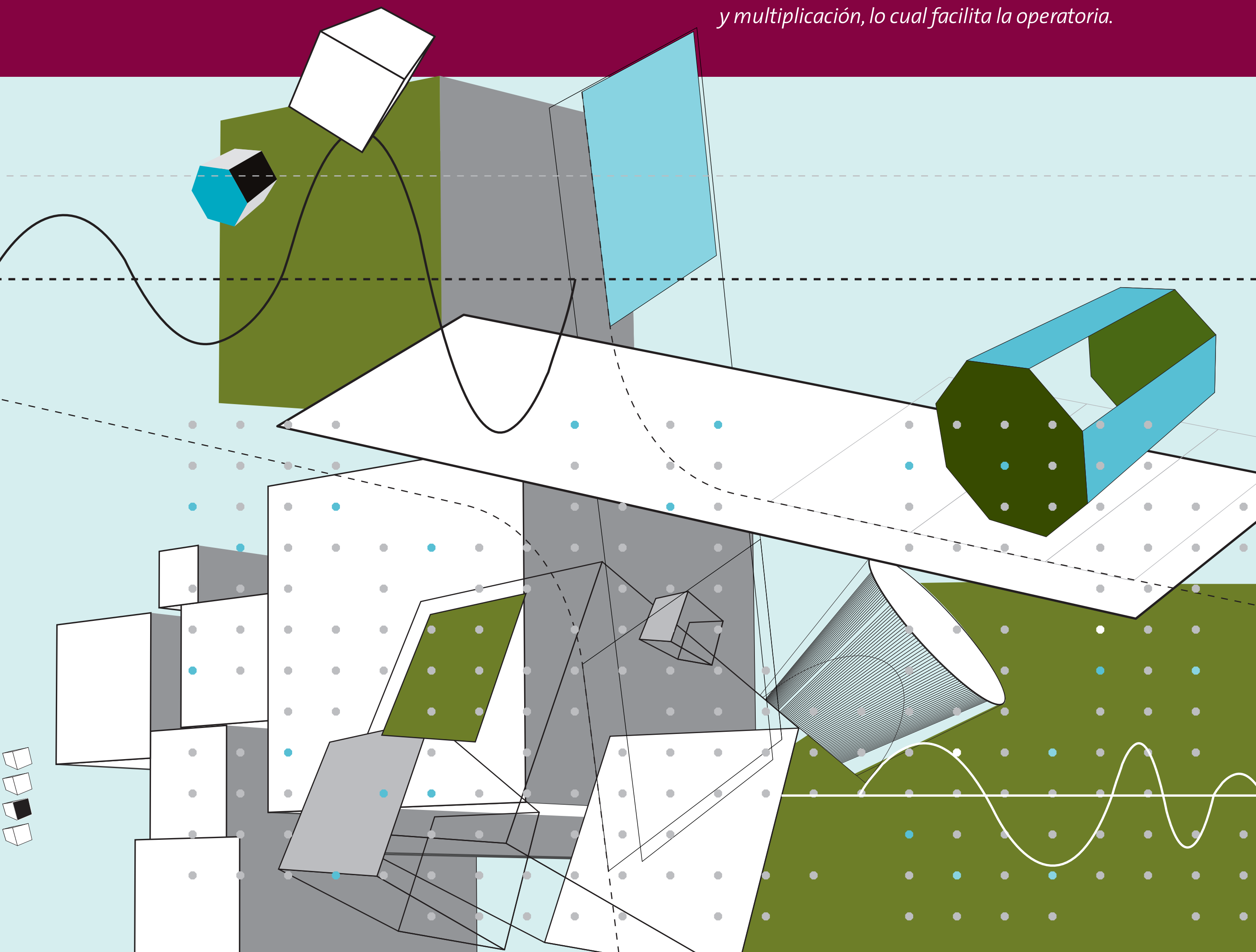
Índice





1 Funciones y ecuaciones polinómicas

Muchas veces los científicos buscan expresiones matemáticas que les permitan vincular las variables que están estudiando y, de esta manera, encontrar resultados sin necesidad de realizar la experiencia. Por ejemplo, el volumen de un cubo se representa como $V(x) = x^3$. Las funciones polinómicas son una buena herramienta para encontrar ese tipo de expresiones utilizando sólo las operaciones matemáticas básicas: suma y multiplicación, lo cual facilita la operatoria.



Registren en sus carpetas los distintos caminos que intentaron para resolver un problema y los motivos por los cuales los descartaron. Esto les servirá a la hora de estudiar.

¿Sabían que...?
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Baviera (ahora Alemania), y murió el 19 de febrero de 1897 en Berlín, Alemania. Es conocido por su construcción de la teoría de funciones complejas por medio de series de potencias (sumas de infinitos monomios). Era un simple profesor hasta que publicó un documento sobre funciones abelianas en el diario de Crelle. Así, obtuvo reconocimiento académico, y en 1856 lo designaron en la Universidad de Berlín. Sus conferencias de Matemática atrajeron a estudiantes de todo el mundo. En Berlín, Weierstrass dio una introducción al análisis, donde abordó sus funciones por primera vez. Estudió funciones enteras, las funciones definidas por los productos infinitos, y demás. Sus resultados cambiaron el futuro de la Matemática.

Problema 1

Una empresa necesita envasar un producto en recipientes de lata cilíndricos, de manera tal que el diámetro de la base sea la mitad de la altura.

a. ¿Con qué dimensiones construyen la lata si ésta debe tener una capacidad de 350 cm^3?

b. Encuentren una fórmula que les permita calcular el volumen de la lata en función de la altura.



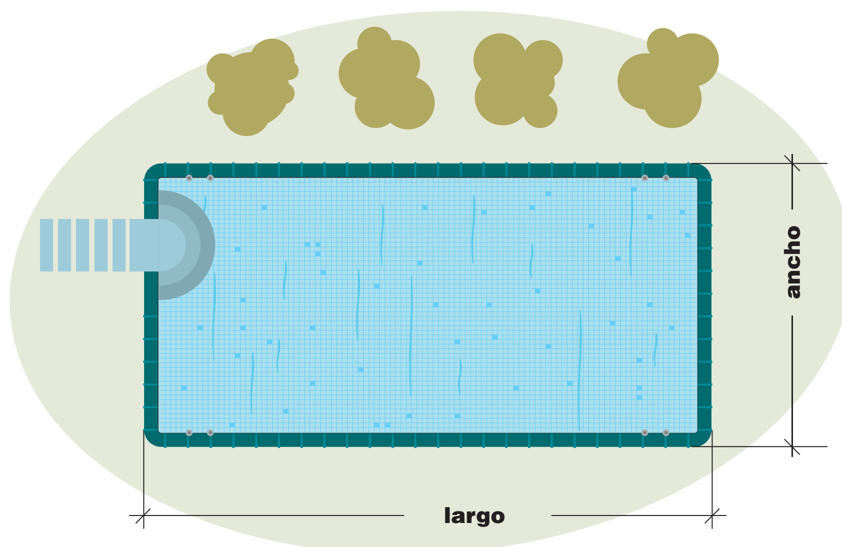
Problema 2

Claudia se compró un terreno en un *country* y quiere instalar allí una pileta de natación rectangular. El arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho. Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta $75 el m^2; la soldadura para las juntas, $40 el m; la excavación y colocación, $50 el m^3 y el traslado de materiales, $100.

a. ¿Cuánto le costará a Claudia una pileta de 5 m de ancho?

b. ¿Si Claudia dispone de $10000, ¿puede construir una pileta de 8 m de largo?

c. ¿Cuáles son las dimensiones de la pileta más grande que puede construir con $5665?



Problema 1

En primer lugar, debemos pensar en encontrar una relación entre las dimensiones de las latas y su volumen. Sabemos que el volumen de un cilindro se calcula con la fórmula $V = \pi r^2 h$, donde **r** es el radio de la base del cilindro y **h** su altura; luego, $350 = \pi r^2 h$. Pero

$$r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4} h\text{; luego,}$$

$$350 = \pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{16} h^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{350.16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$$

Con lo cual, si la lata tiene 350 cm^3 debe tener una altura $h = \sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$ y un radio $r = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{5600}{\pi}}$.

La fórmula que nos permite calcular el volumen de la lata en función de la altura es, entonces, $V(h) = \frac{\pi}{16} h^3$.

Problema 2



Si la pileta de Claudia tiene 5 m de ancho, debe tener 10 m de largo y 2,5 m de altura, entonces:

Cantidad de material necesario para el piso	$5 \times 10\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad de material necesario para dos paredes laterales	$2 . (5 \times 2{,}5\ m^2) = 2 . 12{,}5\ m^2 = 24\ m^2$
Cantidad de material necesario para las otras dos paredes laterales	$2 . (10 \times 2{,}5\ m^2) = 2 . 25\ m^2 = 50\ m^2$
Cantidad total de material necesario	$50\ m^2 + 2 . 12{,}5\ m^2 + 2 . 25\ m^2 = 124\ m^2$

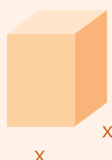


Puerto de Alejandría

¿Sabían que...?

Hypatía de Alejandría, matemática, astrónoma y filósofa del siglo IV, fue la hija de un matemático y astrónomo que trabajaba en el museo de esa ciudad, quien le enseñó el arte de la oratoria y los principios de la enseñanza. Muchos estudiantes de otras ciudades viajaban a Alejandría para aprender con ella. La mayor parte de sus escritos eran libros de texto para sus alumnos. Su trabajo más importante fue en Álgebra. Más cerca de nuestros días, María Gaetana Agnesi (1718 - 1799), la mayor de veintiún hermanos, hija de un profesor de Matemática que le brindó una gran educación (contrariamente a las costumbres de su época en cuanto a las mujeres), fue reconocida como una verdadera niña prodigio debido a la cantidad de lenguas que hablaba desde muy temprana edad. En su adolescencia se graduó en Matemática, y a los veinte años comenzó a trabajar en su más importante obra, *Istituzione analitiche*, pensada como un libro de texto para sus hermanos. Cuando este libro fue publicado en 1748, se transformó en un éxito en el mundo académico, por ser uno de los primeros y más completos tratados de análisis matemático y un modelo de claridad. Fue traducido a varios idiomas y utilizado ampliamente como texto.

1. Un edificio necesita un tanque de agua en forma de ortoedro (paralelepípedo de base cuadrada, como indica la figura), y cuya altura exceda en 10 cm a la cuarta parte del lado de la base.



a. ¿Qué volumen tendrá un tanque que tenga 1 m de ancho?

____

b. ¿Qué volumen tendrá el tanque si tiene 1 m de altura?

____

c. Encuentren una función que permita calcular el volumen del tanque en función del lado de su base.

____

____

2. Tenemos un diario gigante abierto. Encuentren una función que permita calcular el grosor que se obtiene al doblarlo 4 veces en función del grosor del diario abierto.

____

____

____

El costo del material es entonces: \$75 . 124 = \$9300.
Tenemos en total 8 juntas: 4 de 2,5 m; 2 de 10 m y 2 de 5 m, o sea que necesitamos (4 . 2,5 + 2 . 10 + 2 . 5) m = 40 m de soldadura ∴
el costo de la soldadura será: \$40 . 40 m = \$1600.
Para saber el costo de colocación, necesitamos conocer los m^3 que se van a colocar.
El volumen de la pileta es 5 . 10 . 2,5 m^3 = 125 m^3 ∴
el costo de excavación y colocación será: \$50 . 125 m^3 = \$6280.
El costo del traslado será: \$100.
El costo total de la pileta será:
\$9300 + \$1600 + \$6280 + \$100 = \$17280.

Si la pileta debe tener 8 m de largo, entonces tendrá 4 m de ancho y 2 m de alto ∴

Costo de materiales	(8 . 4 + 8 . 2 . 2 + 4 . 2 . 2) . 75 = \$6000
Costo de soldadura	(8 . 2 + 4 . 2 + 2 . 4) . 40 = \$1280
Costo de excavación y colocación	(8 . 2 . 4) . 50 = \$3200
Costo de traslado	\$100
Costo total	\$10580

Para poder saber cuáles son las dimensiones de la pileta que se puede construir con \$5665, tenemos que encontrar una fórmula que nos permita calcular el costo de la pileta en función de su ancho.
Llamemos, entonces, **x** al ancho de la pileta; luego, el largo es 2x y la profundidad es $\frac{1}{2}$ x.

Costo de materiales	$(x \cdot 2x + 2x \cdot \frac{1}{2} x \cdot 2 + x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2) \cdot 75 =$ $= (2x^2 + 2x^2 + x^2) \cdot 75 = 5x^2 \cdot 75 = \$375\, x^2$
Costo de soldadura	$(2x \cdot 2 + x \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2) \cdot 40 =$ $= (4x + 2x + x) \cdot 40 = 7x \cdot 40 = \$280 \cdot x$
Costo de excavación y colocación	$(x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot x) \cdot 50 = \$50 \cdot x^3$
Costo de traslado	\$100
Costo total	$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100$

Por lo tanto, tenemos que resolver la ecuación:
$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$

Como vemos, esta ecuación es distinta de las conocidas hasta el momento, porque tiene un término con x^3. Dado que no podemos despejar **x**, ni tampoco conocemos alguna fórmula que la resuelva, analicemos qué se puede hacer.
Para ello, debemos definir previamente varios conceptos.

Función polinómica

Un **polinomio**, o **función polinómica**, es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde los $a_0,\ldots,a_n$ son números reales, **n** es un número natural o cero y todas las potencias a las que aparece elevado **x** son números naturales o cero.

$a_0,\ldots,a_n$ se llaman **coeficientes del polinomio**
a_n se llama **coeficiente principal**
a_0 se llama **término independiente**
n se llama **grado del polinomio**
Si $a_n = 1$, dicho polinomio se llama **mónico**.
El polinomio cuyos coeficientes son todos cero se llama **polinomio nulo**, se nota N(x) y no tiene grado.

Por ejemplo:

$P(h) = \frac{\pi}{16} h^3$ es un polinomio de grado 3; el coeficiente principal es $\frac{\pi}{16}$, y el resto de los coeficientes, cero.
$Q(x) = 50x^3 + 375x^2 + 280x + 100$ es un polinomio de grado 3 cuyo coeficiente principal es 50.
$R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 5$ es un polinomio mónico de grado 4.

Las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado y las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de grado 2.

Dado que para cualquier valor de **x** podemos realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función, el dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$, aunque en las funciones de los problemas 1 y 2 el contexto determina que $x > 0$.

3. Determinen cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no. En este último caso, expliquen por qué. En caso de que sí lo sean, determinen el grado, el coeficiente principal y el término independiente.

a. $Q(x) = 9x + 8x^2 - 2$

b. $R(x) = 0$

c. $T(x) = -x + \frac{3}{x}$

d. $Z(x) = 3$

e. $W(x) = 8x^4 - 3 - 8x + \frac{1}{2}x^2 - 2$

f. $K(x) = -x^4 - 3x - 8 \,.\, x^{-2}$

g. $M(x) = \sqrt{x}$

4. Resuelvan las siguientes ecuaciones y escriban el conjunto solución.

a. $9x^3 - 3 = 0$

b. $(x - 3)\,.\,(x + 5)\,.\,(x - 1) = 0$

c. $2x^4 - 4x^3 = x^4 + 2x^3$

5. Las funciones halladas en los problemas 1 y 2 ¿son polinomios? ¿Por qué? ¿Cuál es el grado y cuáles son los coeficientes?

6. Dadas las siguientes funciones polinómicas, encuentren dominio, ordenada al origen, ceros, conjunto de positividad y negatividad. Grafíquenlas como corrimientos de la función $f(x) = x^9$ o de la función $f(x) = x^6$, según corresponda.

a. $G(x) = 2x^9$

b. $R(x) = x^6 - 4$

c. $H(x) = -x^9 + 2$

Dos **polinomios** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$
son **iguales** si tienen igual grado y todos sus coeficientes correspondientes iguales, o sea, si $\forall i = 1, 2, ..., n$: $a_i = b_i$

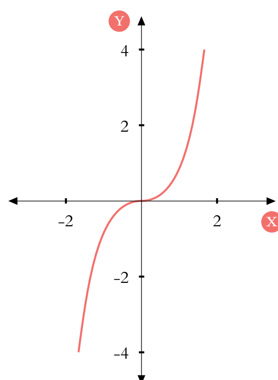
Una **ecuación polinómica de grado n** es una ecuación de la forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$

Por ejemplo: la ecuación del problema 2 que tenemos que resolver es una ecuación polinómica de tercer grado o de grado 3. La ecuación $3x^2 - 5x - 2 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 2 (una ecuación cuadrática), y vimos con anterioridad métodos para resolverla (fórmula resolvente)[1]. Debemos ahora buscar formas de resolver ecuaciones de grado mayor.

Comencemos analizando algunas funciones polinómicas especiales:

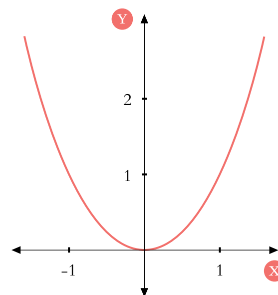
$f(x) = x^3$
es una función polinómica de grado 3, con coeficiente principal 1 y el resto de los coeficientes, 0. Como tiene un solo término, se llama **monomio**. Analicemos su gráfica a partir de una tabla de valores.

x	0	1	–1	2	–2
f(x)	0	1	–1	8	–8



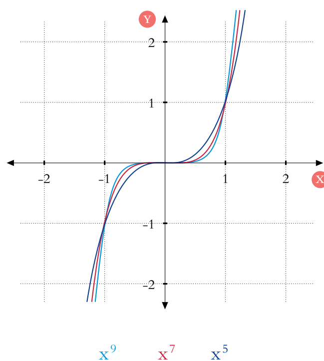
$f(x) = x^4$
es una función polinómica de grado 4, con coeficiente principal 1 y el resto de los coeficientes, 0. Como tiene un solo término, se llama **monomio**. Analicemos su gráfica a partir de una tabla de valores.

x	0	1	–1	2	–2
f(x)	0	1	1	16	16

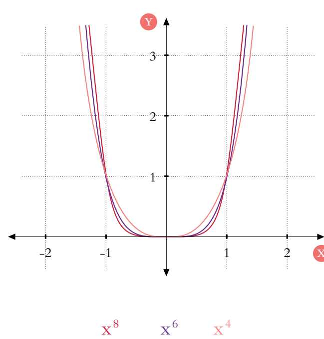


[1] Ver Libro 1, capítulo 4.

Como vemos en el gráfico, la curva que representa esta función es simétrica respecto del punto (0, 0), o sea, es una función impar[2], y su imagen es ℝ.
Tiene ordenada al origen 0 y raíz x = 0; su conjunto de positividad es $(0, +\infty)$, su conjunto de negatividad es $(-\infty, 0)$ y es creciente en todo su dominio.
Análogamente, podemos graficar $f(x) = x^n$ con **n** impar.
Veamos algunos ejemplos.



Como vemos en el gráfico, la curva que representa esta función es simétrica respecto del eje **y**, o sea, es una función par[3], y su imagen es $[0, +\infty)$.
Tiene ordenada al origen 0 y raíz x = 0; su conjunto de positividad es ℝ, su conjunto de negatividad es ϕ, y es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.
Análogamente, podemos graficar $f(x) = x^n$ con **n** par.
Veamos algunos ejemplos.



Si quisiéramos graficar ahora funciones de la forma $f(x) = a_n x^n + a_0$, podemos analizarlas como corrimientos[4] de los gráficos anteriores

Problema 3

En una empresa, se conoce la función precio unitario P(x) y la función costo en la producción y venta de **x** miles de unidades de determinado artículo, C(x). Estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas: $P(x) = 8 – 0,7x$; $C(x) = 6 + 1 . 3x$.

a. Si el ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario, escriban la fórmula de la función ingreso I(x).

b. Si la ganancia es la diferencia entre el ingreso y el costo, ¿cuál es la fórmula correspondiente a la función ganancia G(x) para este artículo?

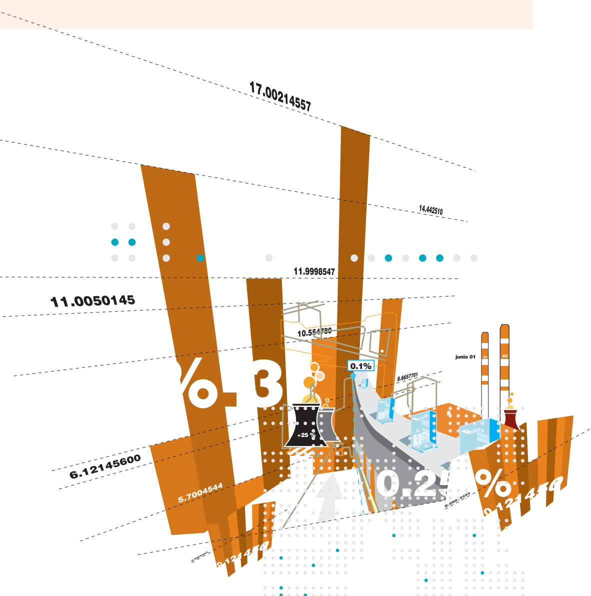
[2,3,4] Ver Libro 1, capítulo 1.

7. A partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de las gráficas de $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, completen la siguiente tabla, explicando cada paso.

Fórmula	$f(x) = x^n$, n par	$f(x) = x^n$, n impar
Forma aproximada de la gráfica		
Dominio		
Ordenada al origen		
Ceros		
C^+		
C^-		
Intervalos de crecimiento		
Intervalos de decrecimiento		
Imagen		

8. A partir de las conclusiones obtenidas en el análisis de las gráficas de $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, completen la siguiente tabla, explicando cada paso.

Fórmula	**$f(x) = ax^n + b$**	
	n par, $a > 0, b > 0$	**n impar** $a > 0, b > 0$
Forma aproximada de la gráfica		
Dominio		
Ordenada al origen		
Ceros		
C^+		
C^-		
Intervalos de crecimiento		
Intervalos de decrecimiento		
Imagen		



Problema 3

En la primera pregunta, nos piden que hallemos la fórmula de la función producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario, por lo tanto:
$I(x) = P(x) \, . \, x = (8 - 0{,}7x) \, . \, x$. Si aplicamos la propiedad distributiva y operamos, obtenemos:
$I(x) = 8x - 0{,}7\, x^2$

Para el ítem **b.**, hallamos la función que resulta de calcular la diferencia entre el ingreso y el costo.
$G(x) = I(x) - C(x) = 8x - 0{,}7\, x^2 - (6 + 1 \, . \, 3x) = 6{,}7x - 0{,}7\, x^2 - 6$

El dominio de I(x) es el conjunto de todos los valores que están en el dominio de P(x) que sean mayores que 0, y el dominio de G(x) está formado por los valores **x** que petenecen al dominio de P(x) y al de C(x), o sea que el dominio de las nuevas funciones es la intersección de los dominios de las funciones originales.

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

La **suma de dos funciones polinómicas** P(x) y Q(x) es la función R(x) tal que R(x) = P(x) + Q(x).
Siendo:
$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$Q(x) = b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$
el polinomio $R(x) = c_n\, x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ es **suma de los dos polinomios** P(x) y Q(x) si sus coeficientes c_i verifican:
$c_i = a_i + b_i$, $\forall i$ entre 0 y **n**.

Por ejemplo:
$P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7$
$Q(x) = 8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2$ } $\Rightarrow$

$R(x) = P(x) + Q(x) = (3x^4 + 5x^2 - 6x + 7) + (8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= 8x^5 + (3 - 7)\, x^4 + (5 - 3)\, x^2 + (-6 + 9)\, x + (7 + 2) =$
$= 8x^5 - 4x^4 + 2\, x^2 + 3\, x + 9$

$M(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7$
$N(x) = -3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2$ } $\Rightarrow$

$M(x) + N(x) = (3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7) + (-3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= (3 - 3)\, x^4 + (8 - 7)\, x^3 + (-6 - 3)\, x^2 + (-5 + 9)\, x + (7 + 2) =$
$0 \, . \, x^4 + x^3 - 6\, x^2 + 4x + 9$

Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Definimos el **polinomio opuesto de P(x)** como:
$$-P(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$$

La **resta de dos funciones polinómicas** P(x) y Q(x) es la suma entre P(x) y el opuesto de Q(x), o sea
$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Por ejemplo:
$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7 \\ Q(x) = 8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$P(x) - Q(x) = (3x^4 + 5x^2 - 6x + 7) - (8x^5 - 7x^4 - 3x^2 + 9x + 2) =$
$= 3x^4 + 5x^2 - 6x + 7 - 8x^5 + 7x^4 + 3x^2 - 9x - 2 =$
$= -8x^5 + (3 + 7)\, x^4 + (5 + 3)\, x^2 + (-6 - 9)\, x + (7 - 2) =$
$= -8x^5 + 10\, x^4 + 8\, x^2 - 15\, x + 7$

Analizando los ejemplos anteriores, observamos que el grado de la suma y de la resta de dos polinomios depende del grado de éstos.

Conclusión

- **Si dos polinomios tienen distinto grado, entonces el grado de la suma y el grado de la resta coinciden con el grado mayor.**
- **Si ambos tienen el mismo grado, n, entonces:**

Si $a_n + b_n \neq 0$, entonces gr [P(x) + Q(x)] = n
Si $a_n + b_n = 0$, entonces gr [P(x) + Q(x)] < n

Producto de polinomios

El **producto** de dos funciones polinómicas P(x) y Q(x) es la función polinómica R(x) tal que R(x) = P(x) . Q(x).
El producto de dos polinomios es un nuevo polinomio que se obtiene multiplicando cada término del primero por cada uno de los términos del segundo, o sea, aplicando la propiedad distributiva.

¿Cómo se lee...?
gr[P(x)] = grado de P(x)

9. Dados los polinomios
$P(x) = -5x^8 + 6x^7 - \frac{1}{4}x^5 + 8x^3 - 9x^2 + x - 3$

$Q(x) = 5x^8 + 2x^7 - 6x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 7x^3 +$
$+ 12x^2 - 4x + 11$

realicen las siguientes operaciones:
a. P(x) + Q(x)

____

____

b. 2P(x) – 9Q(x)

____

____

10. Determinen los valores de los números reales **a** y **b**, tales que P(x) + Q(x) = R(x), siendo:

a. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$
$Q(x) = ax^3 - bx^2 + (a + b)x - 2$
$R(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 3$

____

____

____

b. $P(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^2 + \frac{2}{5}x + 1$
$Q(x) = ax^5 - (a + b)x^2 + bx - 2$
$R(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 4x^5 + x^2 + \frac{12}{5}x - 1$

____

____

____

11. Dadas las funciones polinómicas
$P(x) = -2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 5$
$Q(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 3$
$R(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 7$
encuentren
a. $W(x) = 5\,P(x) \,.\, Q(x)$

b. $Z(x) = [Q(x)]^2$

c. $M(x) = R(x)\,[P(x) + Q(x)]$

12. Dados los polinomios de grado 5 A(x), B(x) y C(x), ninguno de los cuales es opuesto al otro, determinen los posibles grados de:
a. $A(x) - B(x)$

b. $A(x) \,.\, B(x) + C(x)$

c. $[A(x) - B(x)] \,.\, C(x)$

Por ejemplo,

$P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7$
$Q(x) = x^5 + 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2$ $\Rightarrow$

$P(x) \,.\, Q(x) = (3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 5x + 7) \,.\, (x^5 + 7x^3 - 3x^2 + 9x + 2)$

Aplicando la propiedad distributiva:

$P(x) \,.\, Q(x) = 3x^9 + 21x^7 - 9x^6 + 27x^5 + 6x^4 + 8x^8 + 56x^6 -$
$- 24x^5 + 72x^4 + 16x^3 - 6x^7 - 42x^5 - 18x^4 - 54x^3 - 12x^2 - 5x^6 -$
$- 35x^4 + 15x^3 - 45x^2 - 10x + 7x^5 + 49x^3 - 21x^2 + 63x + 14 =$
$= 3x^9 + 8x^8 + 15x^7 + 42x^6 - 32x^5 + 25x^4 + 26x^3 - 78x^2 + 53x + 14$

$P(x) = 8x^2 + 2x - 3$
$Q(x) = 5$ $\Rightarrow$

$P(x) \,.\, Q(x) = (8x^2 + 2x - 3) \,.\, 5 = 40x^2 + 10x - 15$

Observemos que al multiplicar dos polinomios donde ninguno de ellos es el polinomio nulo, N(x) = 0, el coeficiente principal queda formado por la multiplicación de los coeficientes principales y el grado es la suma de los grados, dado que:

$\forall x \in \mathbb{R}:\ x^n \,.\, x^m = x^{n+m}$

Conclusión

El grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de los grados de los polinomios factores.

gr[P(x) . Q(x)] = gr[P(x)] + gr[Q(x)]

Problema 4

Matías estaba diseñando un programa de computación para construir cajas con forma de prisma recto de base rectangular. Para ello, decidió que las medidas de las aristas de dicho prisma surgieran como funciones de una cierta variable **x**. Tuvo problemas con la computadora y perdió parte de la información. Sólo recuperó las expresiones del volumen del prisma y de dos aristas. ¿Cómo puede hacer para hallar la expresión de la tercera arista si sabe que:

Volumen = $V(x) = 80x^3 + 158x^2 + 101x + 21$
Arista a = $A(x) = 2x + 1$
Arista b = $B(x) = 5x + 3$?

Problema 4

El volumen de este prisma se calcula a través del producto de las expresiones de las tres aristas. Si llamamos C(x) a la arista cuya fórmula se perdió, podemos plantear lo siguiente:

$$V(x) = A(x) \,.\, B(x) \,.\, C(x)$$

Como A(x) . B(x) = (2x+1) . (5x+3) = $10x^2 + 11x + 3$; luego, nuestro problema se reduce a encontrar C(x) que verifique:

$$80\,x^3 + 158x^2 + 101\,x + 21 = (10x^2 + 11x + 3\,)\,.\,C(x)$$

Analicemos primero los grados. Sabemos que:
gr[V(x)] = 3 y gr[A(x) . B(x)] = 2
gr[V(x)] = gr[A(x) . B(x) . C(x)] = gr[A(x)] + gr[B(x)] + gr[C(x)] ⇒
⇒ 3 = 2 + gr[C(x)] ⇒ gr[C(x)] = 1 ⇒ C(x) = ax + b; luego:

$$80x^3 + 158x^2 + 101x + 21 = (10x^2 + 11x + 3\,)\,.\,(ax + b) =$$
$$= 10ax^3 + 10bx^2 + 11ax^2 + 11b\,x + 3a\,x + 3b \Rightarrow$$

como dos polinomios son iguales si todos sus coeficientes son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} 80 = 10\,a \\ 158 = 10b + 11a \\ 101 = 11b + 3a \\ 21 = 3b \end{array}\right\} \Rightarrow \; a = 8 \text{ y } b = 7\text{; luego,}$$

luego, C(x) = 8x + 7

Lo que resolvimos fue una división exacta de polinomios.

Necesitamos analizar, entonces, cómo se dividen, en general, los polinomios. Para ello, recordemos qué ocurre con los números enteros.
Dividir un número entero **a** por otro número entero **b** es encontrar un número entero **c** tal que a = b . c; por ejemplo, si a = 10 y b = 5 entonces c = 2, dado que 5 . 2 = 10. Pero nosotros sabemos que ese número **c** no siempre existe. Por ejemplo, si a = 10 y b = 6, la división entera no es exacta, sino que el cociente es 1 y el resto es 4. Podemos escribir, entonces: 10 = 6 . 1 + 4.

```
10 |_6
 4   1
```

Es decir, dados dos números enteros **a** y **b**, con b ≠ 0, existen siempre únicos números **c** y **r**, tales que:
$a = b\,.\,c + r\,;\;\; 0 \le r < b$

Algo similar ocurre con los polinomios.

Cociente de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), siempre existen polinomios C(x) y R(x) únicos, llamados cociente y resto, respectivamente, tales que:
P(x) = C(x) . Q(x) + R(x) con gr[R(X)] < gr[Q(x)] o R(x) = 0

13. Encuentren, si existen, números reales **a** y **b** tales que P(x) . Q(x) = R(x), en cada caso:

a. P(x) = x + 3
$Q(x) = ax^2 + 3x + 1$
$R(x) = 2x^3 + 9x^2 + bx + 3$

b. $P(x) = (a + 1)\,x^3 - 3x$
$Q(x) = x^2 + 1$
$R(x) = 5\,x^5 + 2x^3 - (2 - b)\,x$

c. $P(x) = a\,x^4 + 3x$, Q(x) = 2x + 3
$R(x) = 4\,x^5 + 6\,x^4 + 8x^2 + 9x$

14. ¿Podemos conocer el grado de un polinomio P(x), sabiendo que:
$[P(x)]^3 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$?

15. Encuentren el polinomio P(x) del ejercicio anterior.

¿Sabían que...?

El *algoritmo*, una técnica sistemática para solucionar un problema, fue utilizado por primera vez por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
Éste es un método de resolución de problemas complicados mediante el uso repetido de otro método de cálculo más sencillo. Un ejemplo de esto es el cálculo de la división larga en números enteros o en polinomios.
En la actualidad, el término “algoritmo” se aplica a muchos de los métodos de resolver problemas que empleen una secuencia mecánica de pasos, como el diseño de un programa de computadora. Al igual que los algoritmos usados en aritmética, los algoritmos para computadoras pueden ser desde muy sencillos hasta bastante complejos.
En todos los casos, la tarea que el algoritmo ha de realizar debe ser definible. Esta definición puede incluir términos matemáticos o lógicos, o una compilación de datos o instrucciones escritas. Esto quiere decir que un algoritmo debe ser programable, incluso si al final se comprueba que el problema no tiene solución.
En la actualidad, existen muchos algoritmos para diversas aplicaciones y algunos sistemas avanzados, como los algoritmos de inteligencia artificial, que llegarán a ser corrientes en el futuro.



Consideremos un ejemplo:
Sean $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9$ y $Q(x) = 2x^2 + 6x + 8$,
necesitamos encontrar polinomios C(x) y R(x) tales que:
$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$; con $gr[R(x)] < gr[Q(x)]$ o $R(x) = 0$
Como $gr[R(x)] < gr[Q(x)] \Rightarrow gr[R(x)] \leq 1 \Rightarrow R(x) = mx + n$.
Además:
$gr[P(x)] = gr[Q(x) \,.\, C(x) + R(x)] \Rightarrow$ como $gr[R(x)] < gr[Q(x)]$
$gr[P(x)] = gr[Q(x) \,.\, C(x)] = gr[Q(x)] + gr[C(x)] \Rightarrow$
$4 = 2 + gr[C(x)] \Rightarrow gr[C(x)] = 2 \Rightarrow C(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x) \Rightarrow$$

$$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9 = (2x^2 + 6x + 8)\,(ax^2 + bx + c) + (mx + n)$$

Operando, obtenemos:

$$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9 =$$
$$2ax^4 + (2b + 6a)\,x^3 + (8a + 2c + 6b)\,x^2 + (8b + 6c + m)\,x + (8c + n)$$

y como los polinomios deben ser iguales:

$$\left.\begin{array}{lll} 2a = 3 & \Rightarrow & a = \frac{3}{2} \\ 2b + 6a = -5 & \Rightarrow & b = -7 \\ 8a + 2c + 6b = 2 & \Rightarrow & c = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 16$$

$$\left.\begin{array}{lll} 8b + 6c + m = -3 & \Rightarrow & m = -43 \\ 8c + n = 9 & \Rightarrow & n = -119 \end{array}\right\} \Rightarrow R(x) = -43x - 119$$

Veamos otra manera de escribir la operación:
Algoritmo de división

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9 & 2x^2 + 6x + 8 \\ - & 3x^4 + 9x^3 + 12x^2 & \frac{3}{2}x^2 - 7x + 16 \quad \text{COCIENTE} \\ \hline & -14x^3 - 10x^2 - 3x + 9 & \\ - & -14x^3 - 42x^2 - 56x & \\ \hline & 32x^3 + 53x + 9 & \\ - & 32x^3 + 96x + 128 & \\ \hline & -43x - 119 \quad \text{RESTO} & \end{array}$$

1°: dividimos $3x^4$ por $2x^2$;

2°: multiplicamos $\frac{3}{2}x^2$ por $2x^2 + 6x + 8$;

3°: restamos $3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 9$ con el resultado del paso 2;

4°: comenzamos de nuevo con el polinomio obtenido en el paso 3 y así seguimos hasta obtener un polinomio de grado menor que gr[Q(x)].

Decimos que **P(x) es divisible por Q(x)** si el resto, R(x), de la división de P(x) por Q(x) es 0.

Ahora supongamos que $Q(x) = x - a$ y P(x) es un polinomio cualquiera. Por el resultado anterior, sabemos que existen C(x) y R(x) tales que:
$P(x) = C(x) . Q(x) + R(x)$, con $gr[R(x)] < gr[Q(x)] = 1$,
o sea, $gr[R(x)] = 0$ o $R(x) = 0$. Entonces, como R(x) es un número, podemos llamarlo solamente R.
Tenemos que $P(x) = C(x) . (x - a) + R$, ∀ número real **x**. En particular, si $x = a \Rightarrow P(a) = C(a) . (a - a) + R = R$; luego, $P(a) = R$.

Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma $(x - a)$ es P(a).

Si, además, **a** es un cero (o raíz) del polinomio, entonces $P(a) = 0$, con lo cual el resto de dividir P(x) por $(x - a)$ es 0.

Conclusión
P(x) es divisible por (x – a) si y sólo si P(a) = 0, o sea, a es raíz de P(x).

Volvamos al problema 2 de la pág. 14.
Necesitamos resolver $50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$, pero vemos que es lo mismo que resolver la ecuación:
$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665 = 0$
O sea, hallar las raíces de la función polinómica
$P(x) = 50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665$.
Nos propondremos, entonces, encontrar un método para hallar las raíces de polinomios de grado mayor que 2 (dado que para los de grado 2 ya sabemos cómo hacerlo).
Por ejemplo, de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.
Como este polinomio tiene término independiente cero, sacamos factor común **x** y obtenemos:
$P(x) = x (x^2 - 5x + 6)$
Para encontrar las raíces debemos resolver: $P(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x (x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = 3$ (usando la fórmula resolvente de las ecuaciones cuadráticas) son las raíces del polinomio y, además, utilizando la forma factoreada de la función cuadrática, podemos escribir: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) (x - 3)$.
Entonces: $P(x) = x (x - 2) (x - 3)$, que es la forma factoreada de este polinomio.

16. Encuentren un polinomio P(x) sabiendo que el cociente de dividir P(x) por $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 5$ es $C(x) = -2x^2 + 5x - 3$ y el resto, $R(x) = 2x - 5$.

17. Encuentren el cociente y el resto de dividir P(x) por Q(x) en cada caso:
a. $P(x) = x^6 - 3x^2 + 1$
$Q(x) = x^4 + 2x$

b. $P(x) = x^4 - 16$
$Q(x) = x^4 - 2$

18. Hallen el resto de dividir:
a. $P(x) = 9x^8 - 3x^6 + 4x^3 - 3$ por $Q(x) = x + 3$

b. $P(x) = -3x^8 - 8x^7 + 4x - 5$ por $Q(x) = x - 5$



¿Sabían que...?

Paolo Ruffini nació el 22 de septiembre de 1765 en Italia y murió el 10 de mayo de 1822. Su padre, Basilio Ruffini, era médico en Valentano. Cuando Paolo era un adolescente, la familia se mudó a Módena, al norte de Italia. Allí, entró en la universidad, en 1783, donde estudió Matemática, Medicina, Filosofía y Literatura. El 9 de junio de 1788, Ruffini se graduó en Filosofía, Medicina y Cirugía; más tarde, en Matemática. El 15 de octubre de 1788, fue designado profesor de análisis, pero no sólo se dedicó a esta tarea, sino que siguió ejerciendo la medicina.

A causa de las guerras, le exigieron un juramento de lealtad a la república, que él no quiso hacer por su religión. Perdió así su título de profesor y entonces se dedicó solamente a la medicina y a su trabajo más original: probar que la ecuación de grado 5 no se puede resolver con radicales. Esto significaba encontrar una fórmula para las raíces en términos de los coeficientes, que implicara solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (Ruffini quería encontrar una fórmula como la utilizada para resolver ecuaciones cuadráticas). En 1799 publicó un libro donde planteó la teoría general de ecuaciones, en el cual mostró que la solución algebraica de la ecuación general de grado mayor que 4 es imposible.

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \therefore P(-1) = 2(-1)^3 + 4(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -1$ es raíz de $P(x)$, con lo cual $P(x)$ es divisible por $[x - (-1)] = (x + 1)$. Encontremos el cociente de dicha división:

$$
\begin{array}{rl}
2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 & \underline{|\; x + 1\quad} \\
-\;\underline{2x^3 + 2x^2 } & \;\; 2x^2 + 2x - 4 \\
2x^2 - 2x - 4 & \\
-\;\underline{2x^2 + 2x } & \\
-4x - 4 & \\
-\;\underline{-4x - 4} & \\
0\;/ &
\end{array}
$$

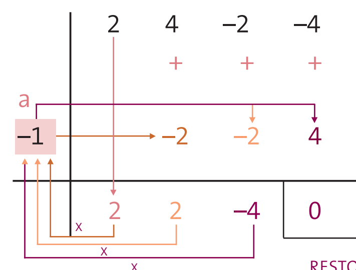
$\therefore P(x) = (x + 1) \,.\, (2x^2 + 2x - 4)$

Pero, entonces, la ecuación $P(x) = 0$ se transforma en $(x + 1) \,.\, (2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow (x + 1) = 0$ ó $(2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -1$ ó $(2x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow$ (utilizando la fórmula resolvente) $\Rightarrow x = 1$ ó $x = -2$. Además, $2x^2 + 2x - 4 = 2\,(x - 1)\,[\,x - (-2)] \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x) = 2\,(x + 1)\,(x - 1)\,[\,x - (-2)]$.

Logramos así hallar las raíces de la función polinómica y escribirla de forma factoreada.

Como es tan útil poder dividir polinomios de cualquier grado por un polinomio de la forma $(x - a)$, existe la siguiente regla:

- *Ubicamos los coeficientes de P(x).*
- *Bajamos el primer coeficiente.*
- *Multiplicamos el primer coeficiente por **a**, lo colocamos bajo el segundo y sumamos.*
- *Repetimos el paso anterior con los siguientes coeficientes hasta terminar. El último número obtenido es el resto.*



Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método sencillo para dividir un polinomio cualquiera por un polinomio mónico de grado 1, o sea, por un polinomio de la forma $(x - a)$.

Analicemos ahora la siguiente función polinómica:

$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$

Para encontrar una raíz, calculamos $P(1)$:

$P(1) = 3 \,.\, 1^4 - 12 \,.\, 1^3 + 9 \,.\, 1^2 + 12 - 12 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$, con lo cual $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Utilizando la regla de Ruffini, obtenemos que $P(x) = (x - 1) \,.\, (3x^3 - 9x^2 + 12)$ y si llamamos

$Q_1(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12$, y buscamos una raíz de $Q_1(x)$, vemos que como $Q_1(2) = 3x^3 - 9x^2 + 12 = 3 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 = 0 \Rightarrow 2$ es raíz.
Luego, con la regla de Ruffini: $Q_1(x) = (x - 2)\,(3 \cdot x^2 - 3x - 6)$.
Llamando $Q_2(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3\,(x + 1) \cdot (x - 2)$
$\therefore P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)\,(x + 1)\,(x - 2) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$

Con todo esto observamos que si tenemos un polinomio $P(x)$ de grado **n** y encontramos una raíz x_1, logramos escribirlo de la forma $P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$ y $gr[Q(x)] = n - 1$. Las raíces de $Q(x)$ serán también raíces de $P(x)$; debemos, entonces, calcular las raíces de $Q(x)$ con un procedimiento similar al de $P(x)$ pero para un grado menos. Si en algún momento obtenemos un polinomio de grado 2, podremos utilizar la fórmula resolvente.

Conclusión
Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

La raíz **a** de $P(x)$ es raíz de **multiplicidad m** si podemos escribir a $P(x)$ de la forma $P(x) = (x - a)^m \cdot Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio con $Q(a) \neq 0$.

Por ejemplo:
$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$
Como $P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)\,(x + 1)\,(x - 2) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$
1 y –1 son raíces de $P(x)$, de multiplicidad 1 (raíces simples) y 2 es una raíz de multiplicidad 2 (raíz doble).

Decimos que un polinomio está escrito en **forma factoreada** si lo escribimos como producto de polinomios de grado 1 o de grado 2, sin raíces reales.

Por ejemplo:
$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12$ en forma factoreada se escribe como $P(x) = 3(x - 1)\,(x - 2)^2\,(x + 1)$.

Ahora bien, una vez que encontramos una raíz, utilizando la regla de Ruffini vamos buscando raíces de polinomios de grado menor. ¿Cómo encontrar la primera raíz?
Lamentablemente, para encontrar raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3 no hay fórmulas, como para los polinomios de grado 2, y no podemos despejar. Entonces, lo que debemos hacer es “tantear” una raíz.
Tantear significa ir probando a mano para encontrar alguna raíz. Los matemáticos buscaron formas de tantear menos engorrosas, o sea, saber qué valores probar para ver si son raíces.

Algo más...
En algunos polinomios especiales, es posible encontrar su forma factoreada utilizando otros caminos más cortos. Para ello, veamos algunos de éstos:

Factor común
Si el polinomio tiene término independiente cero, entonces $P(0) = 0$; luego, 0 es raíz del polinomio y todos los términos tienen **x**, con lo cual, sacando factor común **x**, podemos escribir:
$P(x) = x \cdot Q(x)$ con $Q(x)$ de un grado menos que $P(x)$ y para buscar el resto de las raíces de $P(x)$ buscamos las raíces de $Q(x)$.
Por ejemplo:
$x^4 - 3x^2 + 2x = x\,(x^3 - 3x + 2)$

Trinomio cuadrado perfecto
$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Análogamente:
$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Por esto, podemos factorear las expresiones:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Por ejemplo:
$P(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x + 1 =$
$= (3x - 1)^2$

Diferencia de cuadrados
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 =$
$= a^2 - b^2$
Por esto, podemos factorear la expresión:
$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
Por ejemplo:
$x^4 - 16 = (\,(x^2)^2 - 4^2) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) =$
$(x^2 - 2^2) \cdot (x^2 + 4) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$

19. Encuentren el cociente y el resto de dividir $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $Q_1(x) = x + 5$ y por $Q_2(x) = x - 6$.

20. Encuentren las soluciones racionales de las siguientes ecuaciones:

a. $x^3 - x^2 + 2 = 4x - x^3$

b. $x^4 + x^3 = 3x^2 + 4x + 4$

c. $60x^3 - 67x^2 + 21x - 2 = 0$

¿Sabían que...?
Un **lema** es una proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema.

Gauss propuso el siguiente razonamiento:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ un polinomio con todos los coeficientes enteros, y sea $\frac{p}{q}$ una raíz racional de P(x) escrita en forma irreducible ($p, q \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow 0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 =$$

$$= \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \Rightarrow$$

si dividimos todo por **p** obtenemos:

$$\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{p} = \frac{0}{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + \frac{a_0 q^n}{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_0 q^n}{p} = -(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_1 q^{n-1}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

p debe dividir a $\mathbf{a_0 q^n}$, pero como **p** y **q** no tienen divisores comunes pues la fracción es irreducible, **p** debe ser divisor de $\mathbf{a_0}$.
Con un razonamiento análogo, llegamos a la conclusión de que **q** debe dividir a $\mathbf{a_n}$.

Lema de Gauss

Sea P(x) un polinomio de grado **n** con todos sus coeficientes enteros. Si el número racional $\frac{p}{q}$, escrito de manera irreducible, es raíz de P(x); entonces, **p** divide al término independiente y **q** divide al coeficiente principal.

Por ejemplo:
Hallemos una raíz racional del polinomio
$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$
Para ello, veamos que:

$a_0 = 4$; luego, sus divisores son: 4; –4; 2; –2; 1; –1

$a_n = 3$; luego, sus divisores son: 3; –3; 1; –1

Los posibles $\frac{p}{q}$ son, entonces:

$\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; 4; -4; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; 2; -2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 1; -1$

Luego, debemos probar con ellos:

$$P\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}\,;\ P\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\,;\ P(4) = 140;\ P(-4) = -196;\ P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

Logramos así encontrar una raíz racional del polinomio P(x), $x_1 = \frac{2}{3}$. Para hallar las otras raíces, podemos dividir P(x) por $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ utilizando la regla de Ruffini, y obtenemos:

	3	−2	−6	4
		+	+	+
$\frac{2}{3}$		2	0	−4
	3	0	−6	0

$$P(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right) . (3x^2 - 6)$$

Las raíces de $Q(x) = 3x^2 - 6$, $x_2 = \sqrt{2}$ y $x_3 = -\sqrt{2}$ son las otras raíces de P(x).

Tenemos ahora un método para resolver la ecuación del problema 2 y averiguar las dimensiones máximas de la pileta:

$$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 = 5665$$
$$50x^3 + 375x^2 + 280x + 100 - 5665 = 0$$
$$50x^3 + 375x^2 + 280x - 5565 = 0$$

Tanteando, obtenemos que una solución es 3, dado que $50 \,.\, 3^3 + 375 \,.\, 3^2 + 280 \,.\, 3 - 5565 = 0$; luego, para hallar los otros valores con la regla de Ruffini obtenemos:
$50x^3 + 375x^2 + 280x - 5565 = (x - 3) \,.\, (50x^2 + 525x + 1855)$
Como la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales, x = 3 es la única solución de la ecuación original.
La respuesta al problema 2 de la página 12, entonces, es que Claudia puede construir una pileta de 3 m de ancho.

Problema 5

En un laboratorio comenzaron a las 6 A. M. a medir la temperatura, en grados, de una sustancia durante cierto día, y obtuvieron la fórmula $f(t) = 0{,}01\,t^3 - 0.36\,t^2 + 2{,}88\,t$, donde **t** es el tiempo medido en horas desde el inicio de la medición.

a. ¿A qué hora la temperatura era sobre cero?
b. ¿A qué hora la temperatura era bajo cero?
c. ¿En algún momento la temperatura fue de 6º?

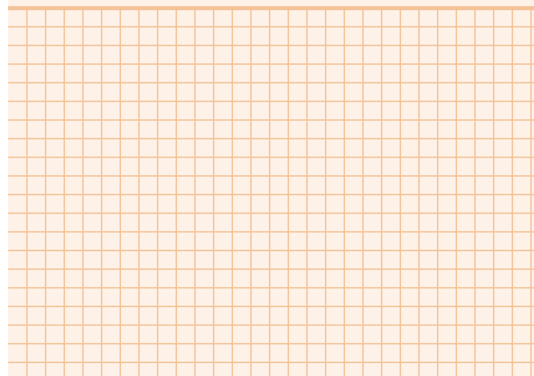
21. Encuentren la forma factoreada de los siguientes polinomios:

a. $F(x) = -24x^3 - 8x^2 + 6x + 2$

b. $R(x) = 81x^4 - 16$

c. $T(x) = -3x^5 - 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 4x$

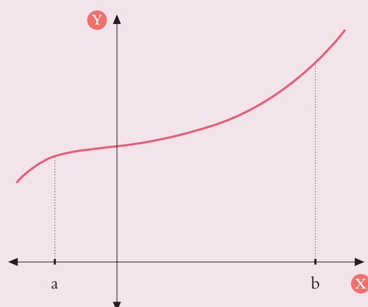
22. Hallen un polinomio de grado 4 que tenga a $\frac{1}{4}$ como raíz de multiplicidad 4 y cuya ordenada al origen sea 5. Grafíquenlo.



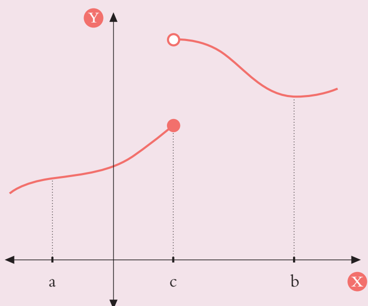
Algo más...

¿Qué significa que una función sea de trazo continuo en un intervalo?

En el Libro 5, analizaremos qué significa que una función sea continua en un punto y, por lo tanto, en un intervalo. Coloquialmente, podemos decir que una función es de trazo continuo en un intervalo (a, b) cuando para dibujarla no tenemos que levantar el lápiz. Veamos algunos ejemplos:



Ésta es una función continua en el intervalo (a, b).



Ésta no es una función continua en el intervalo (a, b) pues no es continua en x = c.

Problema 5

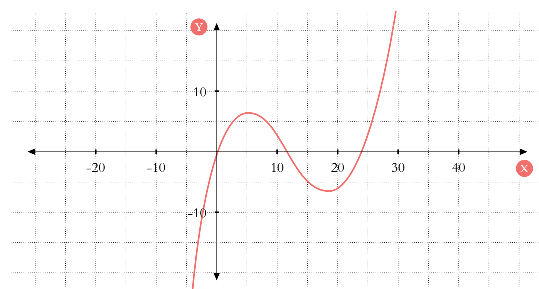
Para saber a qué hora la temperatura era sobre cero, debemos resolver una inecuación: $0{,}01\, t^3 - 0\,.\,36\, t^2 + 2{,}88\, t > 0$, para ello factoricemos el polinomio:

$0{,}01\, t^3 - 0{,}36\, t^2 + 2{,}88\, t = 0{,}01\, t\, (t - 12)\, (t - 24) > 0$

Grafiquemos la función

$f(x) = 0{,}01\, t^3 - 0{,}36\, t^2 + 2{,}88\, t = 0{,}01\, t\, (t - 12)\, (t - 24)$

Sus raíces son 0, 12 y 24; su ordenada al origen, 0.



Si analizamos el gráfico, podemos ver que la temperatura fue sobre cero entre las 0 y las 12 horas de comenzada la medición, o sea entre las 6 y las 18 horas; y que fue bajo cero entre las 12 y las 24 horas de iniciada la medición, o sea, entre las 18 hs. y las 6 hs. del día siguiente.

Podemos ver, además, que a las 6 horas de medición la temperatura fue $f(6) = 0{,}01\,.\,6^3 - 0{,}36\,.\,6^2 + 2{,}88\,.\,6 = 6{,}48$, y a las 7 horas de medición, $f(7) = 0{,}01\,.\,7^3 - 0{,}36\,.\,7^2 + 2{,}88\,.\,7 = 5{,}95$.

Luego, como la gráfica es de trazo continuo, debe haber un valor de **t** tal que f(t) = 6.

> **Teorema del valor medio de Cauchy**
> Si una función **f** es de trazo continuo en un intervalo [a, b] y $f(a) \neq f(b)$, entonces para todo **k** que esté entre f(a) y f(b) existe por lo menos un valor **x** $\in$ [a, b] tal que f(x) = k.

En otras palabras, **f** toma todos los valores entre f(a) y f(b). En particular, si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces 0 está entre f(a) y f(b); luego, existe un $x \in [a, b]$ tal que f(x) = 0.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

> Si una función f(x) es de trazo continuo en un intervalo I y existen $a \in I$, $b \in I$ /$f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe, por lo menos, un $c \in I$ / f(c) = 0.

Supongamos ahora que x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas de una función de trazo continuo f(x), y que **a** y **b** son dos valores entre x_1 y x_2 tales que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; por el teorema anterior,

debería existir un valor **c** entre **a** y **b** tal que f(c) = 0, o sea, **c** sería una raíz de la función. Esto no puede ocurrir porque **c** está entre x_1 y x_2, que eran dos raíces consecutivas; luego, f(a) y f(b) deben ser del mismo signo, o sea:

Corolario del teorema de Bolzano-Weierstrass
Entre dos raíces consecutivas de una función de trazo continuo, la función no cambia de signo. O es positiva o es negativa.

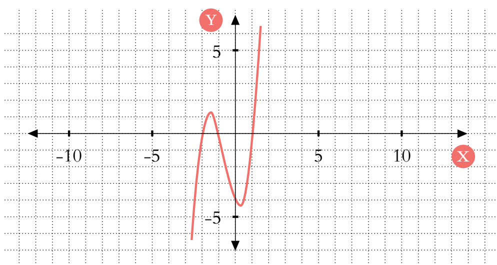
Analicemos las gráficas de ciertas funciones polinómicas:

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-1)(x+2)$ [5]

Como vemos, las raíces son –1, 1 y –2, y la ordenada al origen es P(0) = –4. Analicemos el conjunto de positividad y de negatividad de P(x). Por el corolario del Teorema de Bolzano-Weierstrass, como es de trazo continuo, sólo puede cambiar de signo en las raíces, con lo cual para saber el signo entre dos raíces basta verlo en un punto, o sea:

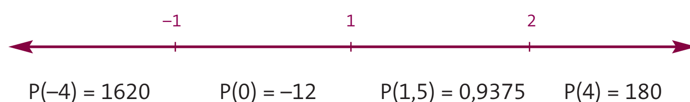


Luego $C^- = (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$ y $C^+ = (-2, -1) \cup (1, +\infty)$ y su gráfica aproximada es:



$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12 = 3(x-1)(x-2)^2(x+1)$ [6]

Las raíces son 1, –1 y 2 (dos veces), y la ordenada al origen es P(0) = –12.
Analicemos el conjunto de positividad y de negatividad de P(x) en los distintos intervalos que quedan formados entre las raíces:



[5] Ver forma factoreada, página 24.
[6] Ver forma factoreada, página 25.

23. Dadas las siguientes funciones, hallen: dominio, intersección con los ejes, intervalos de positividad y de negatividad, y gráfico aproximado:

a. $F(x) = x^3 - 8$

b. $Z(x) = (x^3 - \frac{9}{4})(-x^2 - x + 2)$

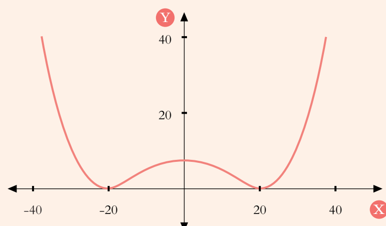
c. $H(x) = (3x - 2)(4x + 1)(x - 5)$

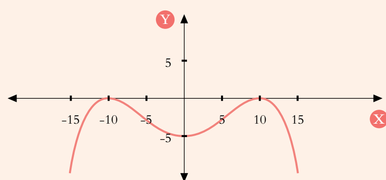
24. a. Encuentren la fórmula de una función polinómica cuyo grado sea 9 y sus únicas raíces sean 2, –3 y 4.

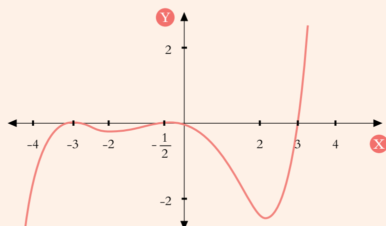
b. ¿Existe una única función que verifica lo anterior?

25. Dada la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, ¿podemos afirmar que existe un valor de **x** tal que $f(x) = 2{,}8$? Expliquen por qué.

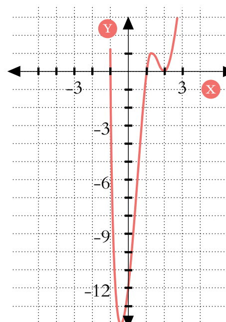
26. Encuentren la fórmula de una función de grado mínimo cuya gráfica sea:







Luego $C^- = (-1, 1)$ y $C^+ = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, y su gráfica aproximada es:



Analizando las dos gráficas anteriores, vemos que aunque ésta puede cambiar de signo sólo en las raíces, no cambia si la raíz tiene multiplicidad par.

Conclusión

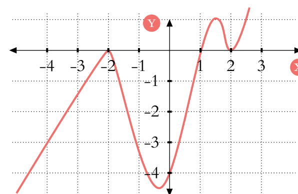
Si una raíz es de multiplicidad par, la gráfica de la función polinómica llega allí, roza y sigue para el mismo lado. Si una raíz es de multiplicidad impar, la gráfica cruza allí el eje.

Problema 6

Tracen la gráfica y hallen la fórmula de una función polinómica de grado 11 cuyas únicas raíces sean –2, 1 y 2, cuya ordenada al origen sea –4 y cuyo conjunto de positividad sea $C^+ = (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Problema 6

Una posible gráfica es la siguiente:



Vemos entonces que en las raíces –2 y 2 no corta al eje; luego, deben ser de multiplicidad par; en cambio, en la raíz 1 cambia de signo, o sea, su multiplicidad debe ser impar.
Su fórmula será: $P(x) = a\,(x+2)^n\,(x-1)^m\,(x-2)^r$ con $n + m + r = 11$, **n** y **r** pares y **m** impar. Por ejemplo:

$P(x) = a\,(x + 2)^2\,(x - 1)^3\,(x - 2)^6$ y como $P(0) = -4$ entonces

$-4 = a\,(0 + 2)^2\,(0 - 1)^3\,(0 - 2)^6 = a\,(-256) \therefore a = \frac{1}{64}$

$P(x) = \frac{1}{64}\,(x + 2)^2\,(x - 1)^3\,(x - 2)^6$

1. Dadas las funciones polinómicas $P(x) = 7x^5 - 6x^4 + 8x^2 + 2$ y $Q(x) = -6x^3 + 3x - 1$, encuentren:

a. $P(-5)$ ____________________

b. $Q(-1)$ ____________________

c. $S(x) = P(x) - 8Q(x)$ ____________________

d. $R(x) = P(x) \,.\, Q(x) + S(x)$ ____________________

2. Dadas las funciones polinómicas
$P(x) = -5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x + 5$; $Q(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ y $R(x) = 10x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5$, hallen:

a. $S(x) = P(x) - 2Q(x) + R(x)$ ____________________

b. $T(x) = 2P(x) - 3Q(x)$ ____________________

c. $[P(x) - Q(x)] \,.\, R(x)$ ____________________

d. $[P(x) + R(x)]^2 \,.\, Q(x)$ ____________________

3. Encuentren un polinomio P(x) que verifique: $3x^4 - 5x^3 + 3P(x) = 9x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3$.

____

____

4. ¿Puede existir un polinomio P(x) que verifique que $[P(x)]^2 = x^3 - 1$? ¿Por qué?

____

5. ¿Es cierto que existe un polinomio K(x) tal que
$2x^6 - 3x^4 + \frac{10}{3}x^2 - 5 = K(x)\,(x^2 - \frac{3}{2})$? Justifiquen su respuesta.

____

____

6. Si $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 4$, determinen si existe un polinomio Q(x) tal que
$P(x) \,.\, Q(x) = 6x^3 - \frac{18}{5}x^2 + \frac{18}{5}x - \frac{24}{5}$.

____

____

7. Encuentren, si es posible, un polinomio Q (x) tal que
$5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - Q(x)\,(x - 4 + 2x^2) = 3x^5 + 3x + 6$.

____

____

8. Determinen, si existen, los números reales **a** y **b** para que $gr[P(x) + Q(x)] = 2$, siendo:

a. $P(x) = 3x^3 + 8x^2 + \frac{1}{2}$ y $Q(x) = (b + 1)x^4 + (a - 2)x^3 - 2x^2 + 1$

b. $P(x) = (a + 1)x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 2x^3 + (a + b)x^2 + (b + 2)x + 4$

9. Hallen el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a. $(8x^7) : (3x^5) =$ ____________

b. $(-4x^5 + 9x^3) : (2x^2) =$ ____________

c. $(6x^3) : (2x^4) =$ ____________

d. $4x^5 : (x + 2) =$ ____________

10. Encuentren números reales **a** y **b** para los cuales el cociente de dividir P(x) por Q(x) sea C(x) y el resto R(x), en cada caso:

a. $P(x) = 6x^2 + ax + b$; $Q(x) = 3x - 2$; $C(x) = 2x - 1$; $R(x) = 0$

b. $P(x) = 2x^4 + ax + (b - 2)$; $Q(x) = 3x^3 + 2$; $C(x) = 2x$; $R(x) = -4x - 3$

11. Sabiendo que el grado de P(x) es 6 y el grado del cociente entre P(x) y Q(x) es 2, ¿cuál es el grado de Q(x)?

12. ¿Es posible conocer el grado del polinomio P(x) si se sabe que al dividirlo por $Q(x) = 2x^2 - 2x + 3$ se obtiene un cociente de grado 5?

13. Encuentren el resto de dividir $P(x) = 6x^5 - 3x^3 + 2$ por $Q(x) = 3x^3 - x + 2$, si el cociente es $C(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}$.

14. Encuentren en cada caso el cociente y el resto de dividir P(x) por Q(x).

a. $P(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ y $Q(x) = 3x^3 + 2x$

b. $P(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 1$ y $Q(x) = x - 3$

15. Encuentren en cada caso el valor del número real **m** para que el polinomio P(x) sea divisible por Q(x), siendo:

a. $P(x) = x^2 - 9x + m + x^3$ y $Q(x) = x + 1$

b. $P(x) = 3x^3 + x - \frac{1}{2}m$ y $Q(x) = x - 4$

c. $P(x) = mx^4 - (m + 1)x^2 - x + 1$ y $Q(x) = x + 1$

16. Dados $P(x) = -3x^4 + 6x^2 - 3a^2x + 3$ y $Q(x) = x + 1$, hallen el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el resto de dividir P(x) por Q(x) sea 11.

17. El resto de dividir $P(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$ por Q(x) es 4. ¿Puede ser $Q(x) = x - 3$ el divisor?

18. Determinen el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el polinomio P(x) sea divisible por Q(x), siendo:

a. $P(x) = 36x^4 - ax^3 - 14x^2 - x + 1$ y $Q(x) = 6x^2 - x - 1$

b. $P(x) = -10x^5 + 15x^4 + ax^3 + 12x^2 - 11x + 3$ y $Q(x) = 5x^3 + 2x - 3$

19. Calculen el valor de $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que $Q(x) = x - 5$ divide a $P(x) = kx^3 + x^2 - k$.

20. Encuentren, si existe, un polinomio M(x) que verifique:

a. $3x^5 - 6x^4 - 3x + 6 = M(x) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b. $x^5 - x^4 - 16x + 16 = M(x) \cdot (-2x^2 + x)$

21. Siendo A(x) y B(x) dos polinomios tales que A(x) es divisible por B(x) y B(x) es divisible por A(x), ¿cómo son A(x) y B(x)?

22. Dados los polinomios $P(x) = x^n - a^n$ y $Q(x) = x^n + a^n$, decidan si son divisibles o no por $x - a$ y por $x + a$.

23. Hallen el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el cociente de la división de $P(x) = 3x^{12} - 3x^9 + +9x^8 + x^6 + 9x^4 - x^3 + 3x^2$ por $Q(x) = x^4 - x + 3$ sea $C(x) = (2k - 5)\, x^8 + x^2 + 9$.

24. Encuentren la forma factoreada de los siguientes polinomios:

a. $Q(x) = 3x^4 + 2x^3 + 11x^2 + 8x - 4$

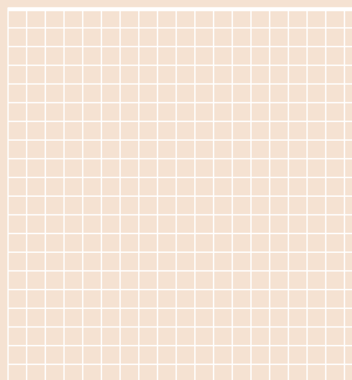
b. $F(x) = -2\, x^3 + 14\, x^2 - 14x - 30$

25. Dadas las siguientes funciones, hallen: dominio, intersecciones con los ejes, conjuntos de positividad y de negatividad, y gráfico aproximado.

$B(x) = -x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 12x - 4$

$P(x) = (x^2 + 4x + 4)\, (-x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 8x + 4)$

$M(x)=(x^2 - 4x + 4)\, (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4)$



ALUMNO CURSO FECHA

26. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen por qué.

a. El polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + x - 1$ tiene todas sus raíces no reales.

b. Un polinomio de grado 6 siempre tiene, por lo menos, una raíz real.

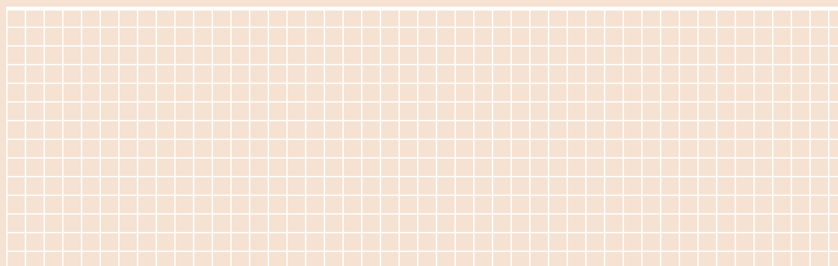
c. La función polinómica $P(x) = -5x^6 + 8$ tiene una única raíz real.

27. Sabiendo que **c** es raíz del polinomio $P(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 5x^2 - 3x + 1$, ¿es cierto que c^{-1} es también raíz?

28. La altura sobre el nivel del mar a la que vuela un globo aerostático está dada por la función $f(t) = t \cdot (t^2 - 10t + 25)$, donde **t** representa los días de viaje.

a. ¿A qué altura estará el globo a los 3 días de salir?

b. Tracen un gráfico aproximado de la altura del globo en función de los días de viaje.



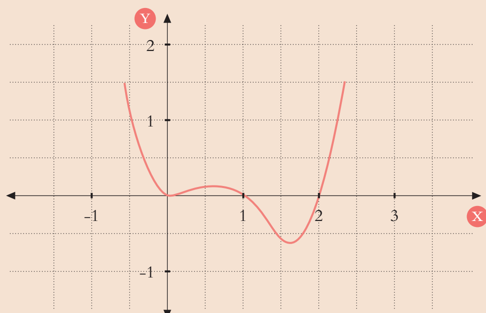
c. ¿Cuál será el dominio de dicha función?

d. ¿Estuvo el globo en algún momento a 18 m sobre el nivel del mar? ¿Por qué?

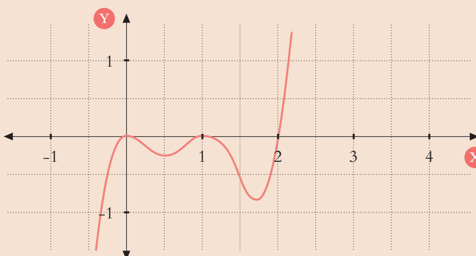
ALUMNO CURSO FECHA

29. Encuentren en cada caso la fórmula de una función polinómica que pueda corresponder a cada gráfica.

a.

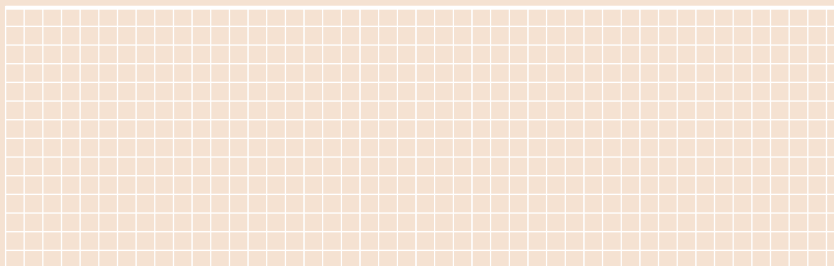


b.



30. Encuentren una función polinómica F(x) de grado 6, tal que $C^- = (-\infty, -4) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ y que verifique F(1) = 0,5.

31. Tracen la gráfica y hallen la fórmula de una función polinómica de grado 11 cuya ordenada al origen sea –7, sus únicas raíces sean –5, –1, 3 y 9, y su conjunto de positividad sea $C^+ = (-5, -1) \cup (9, +\infty)$.



32. Hallen la fórmula de una función polinómica de grado 13 que cumpla las siguientes condiciones: sus únicas raíces son –2, 5 y 8 ; $C^- = (-\infty, -2) \cup (-2, 5)$ y f(9) = 2.

1. Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $gr[P(x)] = 3$ y $gr[Q(x)] = 5$, determinar los siguientes grados:

a. $gr[P(x) + Q(x)]$ =

b. $gr[P(x) - Q(x)]$ =

c. $gr[P(x) . Q(x)]$ =

2. Siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $gr[P(x)] = 5$ y $gr[Q(x)] = 5$, determinar, si es posible, los siguientes grados y, si no es posible, explicar por qué:

a. $gr[P(x) + Q(x)]$ =

b. $gr[P(x) - Q(x)]$ =

c. $gr[P(x) . Q(x)]$ =

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar las respuestas.

a. El grado del cociente de la división del polinomio $P(x) = 5x^8 - 3x^3 + 8$ por $Q(x) = -2x^5 + 3$ es 4.

b. El grado del resto de la división de $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ por $Q(x) = x^2 - 1$ es 1.

c. Existe un polinomio $K(x)$ tal que $P(x) = Q(x) . K(x) + 5$ siendo:
$P(x) = 7x^5 + 21x^2 + x^4 + 3x - 2x^3 - 1$ y $Q(x) = x^3 + 3$.

4. Seleccionar la respuesta correcta y explicar por qué se eligió.

a. El conjunto de negatividad de $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$ es:

I. $(-\infty, 3)$
II. $(-\infty, -1) \cup (-1, 3)$
III. $(3, +\infty)$
IV. ϕ
V. ninguno de los anteriores

b. La forma factoreada de $P(x) = x^6 - 4x^4 - 3x^2 + 12$ es:

I. $P(x) = (x^4 - 3)(x^2 - 4)$
II. $P(x) = (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$
III. $P(x) = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})(x - 2)(x + 2)$
IV. ninguna de las anteriores

ALUMNO CURSO FECHA

5. Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - ax + 1$ sea divisible por $(x + 2)$.

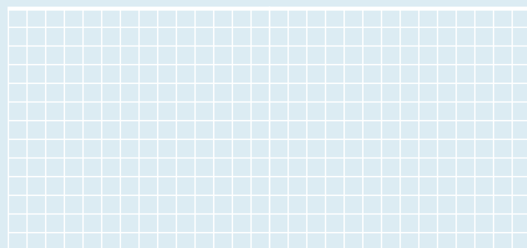
6. Dadas las siguientes funciones polinómicas, encontrar su dominio, raíces, ordenada al origen, forma factoreada, y conjuntos de positividad y de negatividad:

a. $F(x) = 5x^4 - 125x^2 + 720$

b. $P(x) = 5x^3 + 15x^2 - 85x - 15$

7. Sabiendo que $P(x) = M(x) . N(x)$, siendo $M(x)$ una función polinómica de grado 3 que corta al eje **x** en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 5$, cuya ordenada al origen es $(0, 6)$ y cuyo conjunto de negatividad es $C^- = (5, +\infty)$, y $N(x)$, una función lineal cuyo gráfico es una recta paralela a $f(x) = 8x + 9$ y que pasa por $(-1, -14)$.

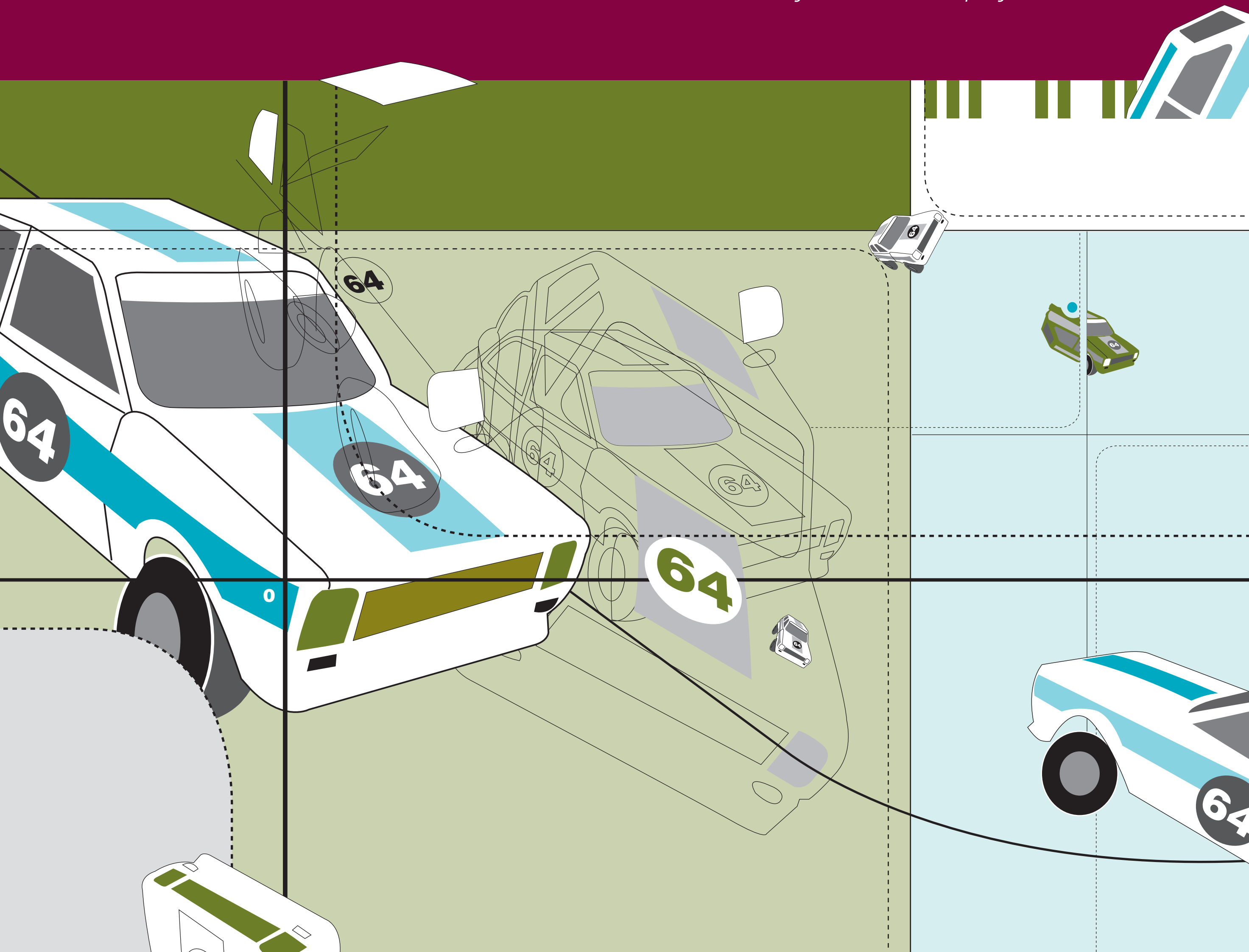
a. Hallar el grado de $P(x)$.
b. Expresar $P(x)$ en forma factoreada.
c. Hallar las raíces de $P(x)$.
d. Trazar la gráfica aproximada de $P(x)$.



8. Hallar la fórmula de una función polinómica de grado 9 cuya ordenada al origen sea -4096, sus únicas raíces sean $-3, -2, 4$ y 8, y cuyo conjunto de positividad sea $C^+ = (-3, -2) \cup (8, +\infty)$.

2 Funciones racionales y funciones homográficas. Ecuaciones e inecuaciones racionales.

Diversas magnitudes, como la presión que ejerce un gas y el volumen que ocupa, se relacionan en forma inversamente proporcional. Esto quiere decir que, por ejemplo, si una de ellas se duplica, la otra se reduce a la mitad. Este tipo de relación genera una función racional específica.



Compartan sus pensamientos con el resto de los integrantes del grupo. El aporte de cada uno, aunque sea pequeño, puede ayudarlos a resolver los problemas.

¿Sabían que...?
Nikolay Lobachevsky nació en 1792 y murió en 1856, en Rusia. Fue uno de tres hermanos en una familia pobre. Después de la muerte de su padre, se mudaron a la ciudad de Kazan, donde asistió a una escuela financiada por el gobierno, y luego fue becado en la universidad del Estado de Kazan. Su intención original era estudiar Medicina, pero se cambió a un curso que abarcaba Física y Matemática.
Recibió una maestría de grado en Física y Matemática en 1811; luego, en 1816, comenzó a enseñar como profesor, y en 1827 fue nombrado rector de la Universidad de Kazan. Durante su gestión, la universidad progresó mucho, tanto en la parte de equipamiento como en el nivel académico.
Publicó trabajos en geometría no euclideana. En 1834 descubrió un método por el cual se pueden aproximar las soluciones de ecuaciones algebraicas. Este método fue desarrollado en forma independiente por Gräffe, en Alemania, y aún hoy se utiliza en programas de computación para resolver ecuaciones. El método se llama Dandelin-Gräffe, ya que Dandelin también lo desarrolló sin tener conocimiento del trabajo de Gräffe; sólo en Rusia se conoce como “método de Lobachevsky”, quien fue el tercer descubridor independiente.
A él se le debe la frase: “No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”.

Problema 1

Un club dispone de \$50000 mensuales para el sueldo de sus deportistas.
a. Si el club tiene 100 deportistas y todos cobran lo mismo, ¿cuánto cobra cada uno?
b. Encuentren una fórmula que permita calcular lo que cobra cada uno en función de la cantidad de deportistas.
c. ¿Qué pasa si el número de deportistas aumenta?
d. Si de lo que cobra, cada deportista debe pagar \$20 en impuestos, ¿cuál es el número razonable de deportistas que debe tener el club para que cada uno cobre por lo menos \$300?

Problema 1

Si tenemos \$50000 y los queremos repartir entre 100 personas, entonces cada una cobrará \$50000 : 100 = \$500. En general, si hay x deportistas, cada uno cobrará

$$S(x) = \frac{50000}{x}$$

Analicemos esta función:

Como estamos hablando de personas, entonces **x** debe ser un número natural, o sea Dom $S(x) = \mathbb{N}$. Además, vemos que a medida que la cantidad de deportistas aumenta, cada uno recibirá menos dinero, o sea que es una función decreciente.

Para responder al último punto, veamos que si deben pagar \$20 en impuestos, entonces cada deportista cobrará

$$g(x) = \frac{50000}{x} - 20$$

y para que los deportistas ganen por lo menos \$300, deberá ser:

$$\frac{50000}{x} - 20 \geq 300 \Rightarrow \frac{50000}{x} - 320 \geq 0 \Rightarrow$$

sacando denominador común **x**: $\frac{50000 - 320\,x}{x} \geq 0$

Pero $x > 0$ por ser la cantidad de deportistas; entonces, para que el cociente sea positivo, el numerador debe ser positivo:
$50000 - 320x \geq 0 \Rightarrow 50000 \geq 320x \Rightarrow x \leq 156{,}25$
O sea que la cantidad razonable de deportistas es de 156 o menos, y cuantos menos deportistas haya, mayor será el sueldo de cada uno.

Función de proporcionalidad inversa

La función que resuelve el problema 1 es de la forma:

$f(x) = \frac{k}{x}$, donde **k** es una constante cualquiera.

Llamaremos **función de proporcionalidad inversa** a la función:
$f(x) = \frac{k}{x}$, con $k \in \mathbb{R}$ es constante y $k \neq 0$.

Realicemos un estudio de este tipo de funciones.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que no existe la división por cero. Además, si $y \in \text{Im } f$, como

$$f(x) = \frac{k}{x} \Rightarrow y = \frac{k}{x} \Rightarrow x = \frac{k}{y} \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

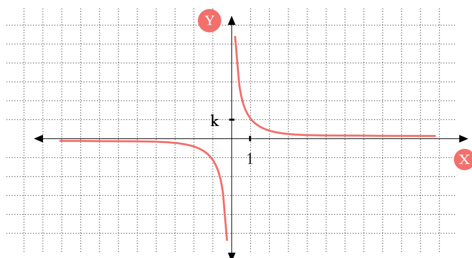
No tiene ordenada al origen porque $0 \notin \text{Dom } f$ y cuando queremos hallar la raíz obtenemos: $k = 0 . x = 0$, que es absurdo pues $k \neq 0$; luego, **f** no tiene raíz.

Podemos ver, además, que a medida que **x** aumenta f(x) toma valores cada vez más cercanos a cero; esto ocurre porque si dividimos el número **k** en cada vez más partes, éstas serán cada vez más pequeñas.

Por otro lado, sabemos que $x \neq 0$, pero ¿qué pasa cuando **x** toma valores cada vez más cercanos a 0? Analicemos esto en una tabla de valores.

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$
f(x)	k	10k	100k	–10k	–100k	–1000k

Cuando **x** se acerca cada vez más a cero, el valor absoluto de **y** crece. Observemos el gráfico de este tipo de funciones:
Si $k > 0$



$C^{+} = (0, +\infty)$ $C^{-} = (-\infty, 0)$ decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Algo más...

¿Por qué no se puede dividir por cero?

Supongamos que se pudiera hacer $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$, entonces existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a}{0} = k \Rightarrow a = 0 . k = 0$.

Pero habíamos dicho que $a \neq 0$; luego, no puede existir este **k**; entonces, no se puede dividir por cero.

1. Para embotellar 90000 litros de gaseosa, se dispone de botellas de distintas capacidades.

a. Completen la siguiente tabla:

Capacidad de los envases (litros)	Cantidad de envases que pueden llenarse
1	
0,5	
0,25	
2	
2,25	

b. Encuentren la fórmula que permite calcular la cantidad de envases que se pueden llenar en función de su capacidad.

____

c. Si se dispone de 4000 envases de igual capacidad y se quiere envasar toda la gaseosa, ¿qué capacidad deben tener los envases?

____

Algo más...

Matemáticamente, decir que *a medida que* ***x*** *se hace cada vez más grande, f(x) se acerca a cero* se escribe:

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

y se lee: **el límite cuando x tiende a infinito de f(x) es cero.**

Decir que *a medida que* ***x*** *se acerca a cero, f(x) se hace cada vez más grande* se escribe:

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \infty$$

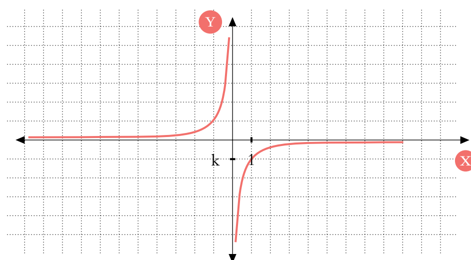
y se lee: **el límite cuando x tiende a cero de f(x) es infinito.**

2. Realicen los gráficos de las siguientes funciones de proporcionalidad inversa. Encuentren el dominio, la imagen y los conjuntos de positividad y negatividad.

a. $f_1(x) = \dfrac{2}{x}$

b. $f_2(x) = \dfrac{-4}{x}$

Si k < 0



$C^- = (0, +\infty)$ $C^+ = (-\infty, 0)$ crece en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

El gráfico de este tipo de funciones se llama **hipérbola.**

Asíntotas

Cada vez que |x| toma valores más grandes, f(x) se acerca a cero, con lo cual la gráfica de la función se acerca cada vez más al eje **x**, o sea, a la recta y = 0. Esta recta se llama "asíntota horizontal de la función", es decir:

Una recta horizontal (y = k) es **asíntota horizontal** de una función f(x) si a medida que |x| aumenta, f(x) se acerca a **k**.

Por ejemplo, en los gráficos analizados en la página anterior, y = 0 es asíntota horizontal.

Como observamos en el gráfico, a medida que **x** se acerca a cero, el valor de **y** aumenta y la función se va acercando a la recta vertical x = 0. Decimos entonces que esta recta es asíntota vertical de la función, o sea:

Una recta vertical x = k se llama **asíntota vertical** de la función f(x) si $k \notin$ Dom f y a medida que **x** toma valores cada vez más cercanos a **k**, |f (x)| toma valores cada vez mayores.

En nuestro ejemplo, x = 0 es una asíntota vertical.

En la última parte del problema, teníamos la función

$g(x) = \dfrac{50000}{x} - 20$, que es un corrimiento de $S(x) = \dfrac{50000}{x}$, 20

unidades hacia abajo en el eje **y**. Su dominio también es $\mathbb{R} - \{0\}$ (sin pensarlo desde el problema donde **x** debía ser natural).

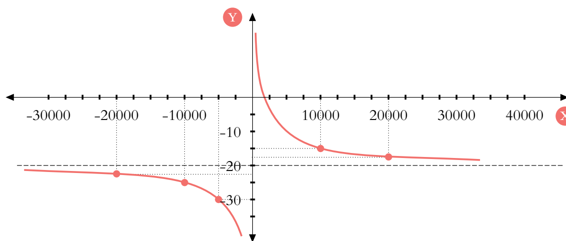
Pero para calcular su imagen:

$$g(x) = \frac{50000}{x} - 20 \Rightarrow y + 20 = \frac{50000}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50000}{y + 20} \Rightarrow y + 20 \neq 0 \Rightarrow y \neq -20 \qquad \text{Im } g = \mathbb{R} - \{-20\}$$

Calculemos la raíz de g(x): $\frac{50000}{x} - 20 = 0 \Rightarrow x = 2500$

y grafiquémosla:



Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = -20$
Decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Si analizamos la gráfica anterior, vemos que no es una función de trazo continuo. Pero en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ por separado sí lo es. Luego, podemos usar el corolario del Teorema de Bolzano-Weierstrass[1], y ver que, en cada intervalo, sólo cambia de signo si hay una raíz. Con esto, realizando un esquema del eje **x**, vemos que:



Nos queda dividido en tres intervalos en los cuales la función no cambia de signo. Luego, eligiendo un valor en cada uno de ellos, podremos saber si la función es positiva o negativa allí.

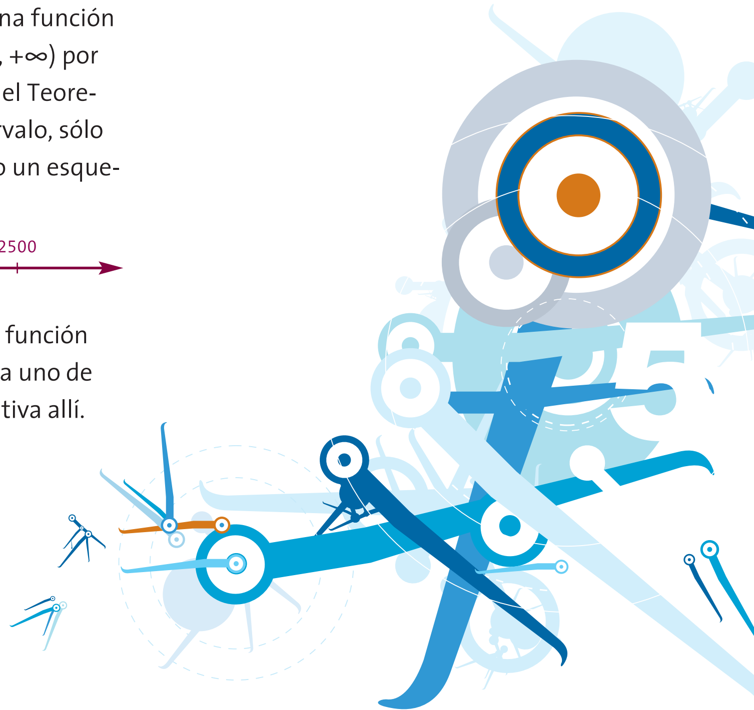
Por ejemplo:
$g(-1) = -50020$, o sea, en $(-\infty, 0)$ es negativa;
$g(1) = 49980$, o sea, en $(0, 2500)$ es positiva;
$g(5000) = -10$, o sea, en $(2500, +\infty)$ es negativa.

Luego,
$C^- = (-\infty, 0) \cup (2500, +\infty)$ $\qquad$ $C^+ = (0, 2500)$
O sea que podemos encontrar los intervalos de positividad y de negatividad previamente a realizar el gráfico.

[1]Ver capítulo 1, página 29.

¿Sabían que...?
La palabra “asíntota” (*asymptote*) fue usada por primera vez por Apollonius para referirse a líneas que no se juntan en ninguna dirección.
La primera vez que se citó en un libro fue en 1656, en *Hobbes' Elements of Philosophy*, de Thomas Hobbes, donde decía: “Una asíntota se acerca y se acerca pero nunca toca”.

Apollonius de Perga nació en Grecia en el 262 a. C. y murió en Alejandría en el 190 a. C. Perga fue un importante centro de la cultura de la época. En su juventud, Apollonius fue a Alejandría, donde estudió con los seguidores de Euclides. Poco se sabe de su vida, pero sus trabajos tuvieron gran influencia en el desarrollo de la Matemática. Fue conocido como “El gran geómetra”. Escribió el famoso libro *Cónicas*, que constaba de ocho tomos donde se introducían términos muy familiares hoy en día, como “parábola”, “elipse” e “hipérbola”.



Algo más...

Para resolver una inecuación racional:

$$\frac{2}{x-4} < 6$$

procedemos como en la página 40:

$$\frac{2}{x-4} - 6 < 0 \Rightarrow \frac{2-6\,(x-4)}{x-4} < 0$$

$$\frac{26-6x}{x-4} < 0$$

Aquí, $x-4$ puede tomar cualquier valor distinto de 0.

Si $x-4>0 \Rightarrow x>4$ y para que el cociente sea negativo, el numerador deberá ser negativo:

$26-6x<0 \Rightarrow 26<6x \Rightarrow \frac{13}{3}<x$

De estas dos condiciones tenemos que:

4 $\frac{13}{3}$

$$x > \frac{13}{3}$$

Si $x-4<0 \Rightarrow x<4$, y para que el cociente sea negativo, el numerador deberá ser positivo:

$26-6x>0 \Rightarrow 26>6x \Rightarrow \frac{13}{3}>x$

De estas dos condiciones, tenemos que:

4 $\frac{13}{3}$

$$x < 4$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$(-\infty, 4) \cup \left(\frac{13}{3}, +\infty\right)$$

4 $\frac{13}{3}$

Problema 2

Juan tiene una lupa. El aumento (cociente entre el tamaño del objeto aumentado y el tamaño real) producido por ella está dado por la expresión $a(d) = \frac{-5}{d-5}$, donde **d** es la distancia de la lupa a la que pone el objeto, medida en decímetros.

a. ¿A qué distancia tiene que colocar Juan el objeto para que se vea a tamaño real?

b. ¿A qué distancia del objeto debe ubicar la lupa para que su tamaño sea mayor que el real?



Problema 3

La intensidad del sonido **y** que nos llega procedente de un parlante responde a la fórmula $y = \frac{100}{d^2}$, donde **d** es la distancia, medida en metros, que nos separa del parlante. ¿A qué distancia hay que colocar un grabador que sólo graba cuando el sonido llega con una intensidad de 64 decibeles?

Problema 2

Si **a** es el aumento de la lupa, o sea, el cociente entre el tamaño del objeto en la lupa y el tamaño real, y queremos ver el objeto a tamaño real, entonces a = 1, y tenemos:

$$\frac{-5}{d-5} = 1 \Rightarrow d-5 = -5 \Rightarrow d = 0$$

O sea que debemos poner la lupa sobre el objeto.

Para que el tamaño del objeto sea mayor, debe ser a > 1; luego,

$$\frac{-5}{d-5} > 1 \Rightarrow \frac{-5}{d-5} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-5-(d-5)}{d-5} > 0 \Rightarrow \frac{-d}{d-5} > 0$$

Pero d > 0 pues es la distancia del objeto a la lupa; luego, –d < 0. Para que ese cociente sea positivo, si el numerador es negativo, el denominador debe ser negativo, con lo cual: $d - 5 < 0 \Rightarrow d < 5$. O sea, el objeto debe estar a menos de 5 decímetros de la lupa para verlo en tamaño más grande.

La función de este problema es:

$$a(d) = \frac{-5}{d-5} = -5 \,.\, f(d-5) \text{ siendo } f(x) = \frac{1}{x}$$

O sea que a(d) es un corrimiento de f(x), 5 unidades hacia la derecha.

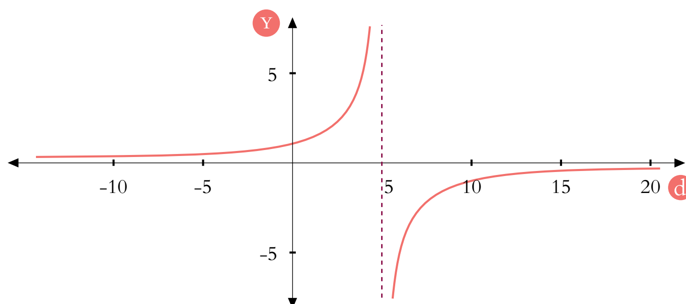
Para calcular el dominio de a(d), sabemos que $d - 5 \neq 0 \Rightarrow d \neq 5$ $\Rightarrow \text{Dom } a = \mathbb{R} - \{5\}$.

La ordenada al origen es a (0) = 1 y no tiene raíz, con lo cual sólo puede cambiar de signo en 5, que es donde no existe la imagen de la función. Luego, para analizar los conjuntos de positividad y negatividad procedemos así:



O sea: $C^+ = (-\infty, 5)$ $C^- = (5, +\infty)$

y su gráfica es:



Asíntota vertical x = 5

Asíntota horizontal y = 0

Crece en $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

3. Resuelvan las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{2}{x-4} < 1$

b. $\frac{3x-1}{x+2} > 3$

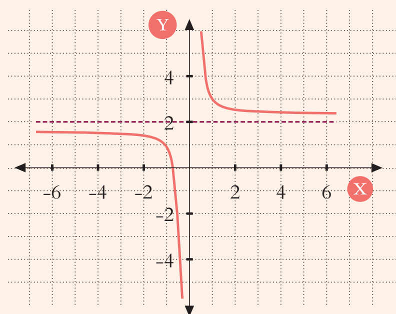
c. $\frac{x}{2x-1} > -2$

4. Hallen los puntos de intersección entre las gráficas de las siguientes funciones:

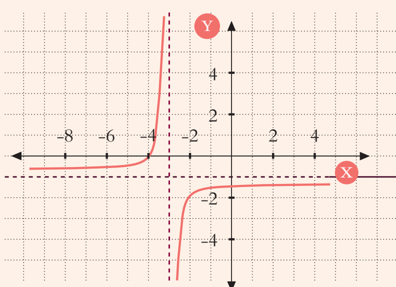
$f(x) = \frac{2x-1}{x}$ $g(x) = 3x - 2$

5. Determinen las fórmulas de las funciones representadas por las siguientes gráficas, sabiendo que son corrimientos de $f(x) = \frac{1}{x}$.

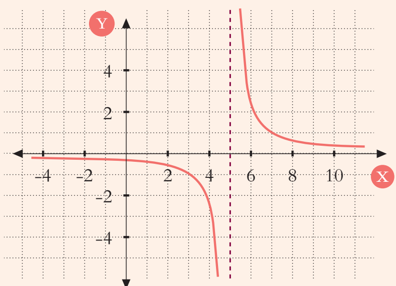
a.



b.



c.



Problema 3

Si **y** es la intensidad del sonido y necesitamos que **y** sea igual a 64 decibeles, entonces

$$\frac{100}{d^2} = 64 \Rightarrow d^2 = \frac{100}{64} = \frac{25}{16} \Rightarrow |d| = \sqrt{\frac{25}{16}}$$

Como **d** es una distancia, $d > 0$; luego, $d = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

O sea, debe ubicar el grabador a 1,25 m de la fuente de sonido desde donde se va a grabar.

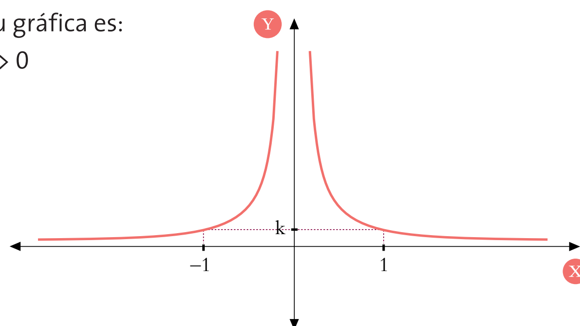
Esta función es del tipo $h(x) = \frac{k}{x^2}$, siendo Dom $h = \mathbb{R} - \{0\}$.

No tiene raíz ni ordenada al origen y difiere de $f(x) = \frac{k}{x}$ en los conjuntos de positividad y negatividad.

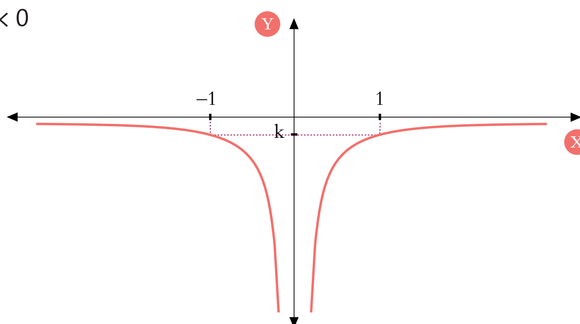
$$\text{Si } k > 0 \Rightarrow C^+ = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),\ C^- = \phi$$
$$\text{Si } k < 0 \Rightarrow C^- = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),\ C^+ = \phi$$

Su gráfica es:

$k > 0$



$k < 0$



Hasta ahora, analizamos funciones de la forma:

$$f(x) = \frac{k}{x};\ g(x) = \frac{k}{x-2};\ t(x) = \frac{k}{x} + b;\ h(x) = \frac{k}{x^2}$$

Generalicemos ahora estos conceptos.

Función homográfica

Una **función homográfica** es una función de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, con $c \neq 0$.

Analicemos este tipo de funciones.
Para empezar, encontremos el dominio. Como la función se expresa mediante una división, el denominador debe ser diferente de cero; luego,

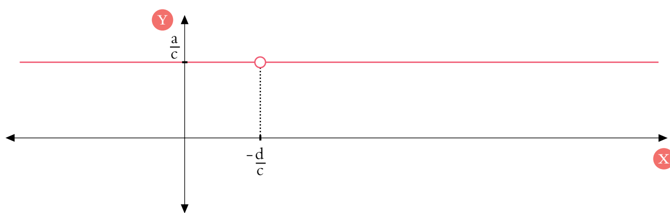
$$cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{d}{c} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Como $ax + b$ y $cx + d$ son polinomios, podemos hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} ax + b & cx + d \\ -\left(ax + \frac{ad}{c}\right) & \frac{a}{c} \\ \hline b - \frac{ad}{c} & \end{array}$$

Si el resto es $0 \Rightarrow ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$ y como

$b - \frac{ad}{c} = 0 \Rightarrow ad = bc$, entonces la gráfica de la función es una recta horizontal con una discontinuidad en $-\frac{d}{c}$.



Con esto, la imagen de la función f es $\text{Im } f = \left\{\frac{a}{c}\right\}$

Si el resto es distinto de $0 \Rightarrow ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + \frac{bc - ad}{c}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)}$$

Luego, podemos escribir estas funciones: $f(x) = A + \frac{B}{x - C}$

donde $A = \frac{a}{c}$; $B = \frac{bc - ad}{c^2}$; $C = -\frac{d}{c}$ y $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{C\}$.

6. Grafiquen las siguientes funciones y hallen:

a. Dominio e imagen.

b. Asíntotas.

c. Ceros, y conjuntos de positividad y negatividad.

I. $f_1(x) = \frac{3x - 4}{x + 2}$

II. $f_2(x) = \frac{4 - x}{x + 1}$

Algo más...
Llamamos **función racional** a toda función cuya fórmula es un cociente de polinomios, o sea:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P(x) y Q(x) son polinomios.
El dominio de f(x) será:
Dom f = $\mathbb{R} - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$, o sea, todos los valores de **x** reales salvo las raíces de Q(x).

Las funciones homográficas son funciones racionales, pero hay muchas otras.
Consideremos el siguiente ejemplo:

$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

Simplifiquemos la expresión de f(x)

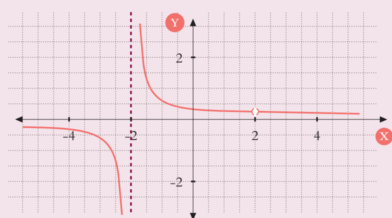
$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} =$$

$$= \frac{1}{x+2}, \forall x \neq -2$$

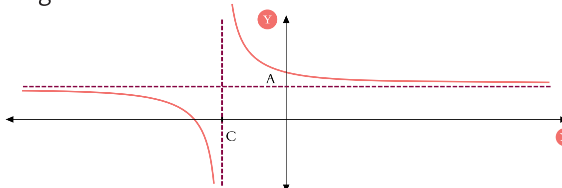
f(x) difiere de la función

$g(x) = \frac{1}{x+2}$ sólo en x = 2

Veamos la gráfica de f(x).



Su gráfica es:



y su imagen, Im f = $\mathbb{R} - \{A\}$.

La función resultante es un corrimiento de la función $f(x) = \frac{k}{x}$, de modo que B "agranda" o "achica" la gráfica, A la sube o la baja y C la corre para la izquierda o para la derecha.

Luego, podemos decir que:

Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{C\}$ Asíntota vertical x = C
Im f = $\mathbb{R} - \{A\}$ Asíntota horizontal y = A

Consideremos un ejemplo:

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x+8}$$

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x+8} = \frac{3}{4} + \frac{-4}{4(x+2)} = \frac{3}{4} + \frac{-1}{x-(-2)}$$

Tiene:
Dom f = $\mathbb{R} - \{-2\}$ Asíntota vertical x = −2

Im f = $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$ Asíntota horizontal $y = \frac{3}{4}$

Ordenada al origen $y = \frac{1}{4}$ Raíz $= -\frac{2}{3}$

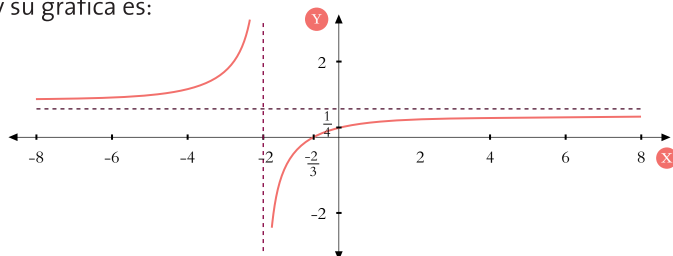
Para calcular sus conjuntos de positividad y negatividad, observemos:



$f(-5) = \frac{13}{12}$ $f(-1) = -\frac{1}{4}$ $f(6) = \frac{5}{8}$

Luego:
$C^+ = (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ $C^- = (-2, -\frac{2}{3})$

y su gráfica es:



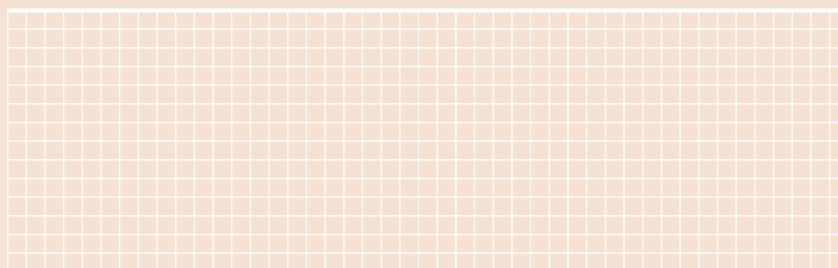
1. La densidad es la masa de un cuerpo por unidad de volumen. Una cierta sustancia tiene una masa de 0,1 g.

a. Completen la siguiente tabla:

Volumen		$100\ cm^3$		$10\ cm^3$
Densidad	$10\ g/cm^3$		$60\ kg/cm^3$	

b. Encuentren la fórmula que relacione la masa de la sustancia con el volumen.

c. Grafiquen la función hallada.



2. Para hacer un viaje de 800 km, un conductor decide manejar a velocidad constante.

a. Completen la siguiente tabla:

Velocidad (km/h)	50	40	100	120	150
Tiempo que tarda en realizar el viaje (horas)					

b. Encuentren la fórmula que permita calcular el tiempo necesario para el viaje en función de la velocidad.

3. Hallen la fórmula de:

a. Una función homográfica decreciente con asíntota vertical en $x = 1$ y asíntota horizontal en $y = -2$.

b. Una función homográfica creciente cuya raíz es 4 y cuya ordenada al origen es -2.

ALUMNO CURSO FECHA

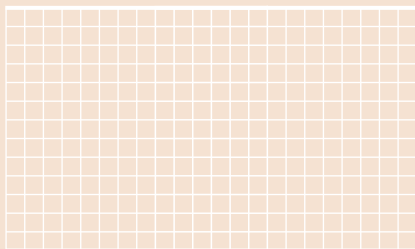
4. Para cada una de las siguientes funciones:

a. Encuentren el dominio, la imagen y las asíntotas, si las hubiera.

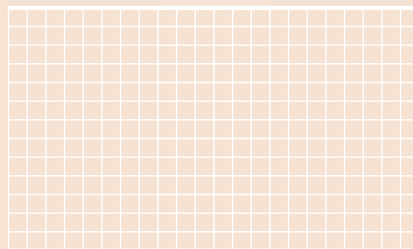
b. Calculen la raíz y la ordenada al origen.

c. Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los conjuntos de positividad y negatividad.

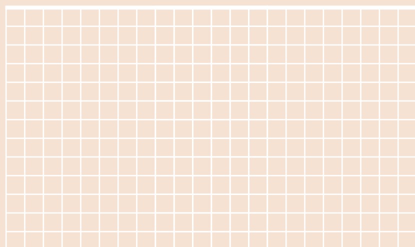
$f_1(x) = \frac{3x - 4}{x + 2}$



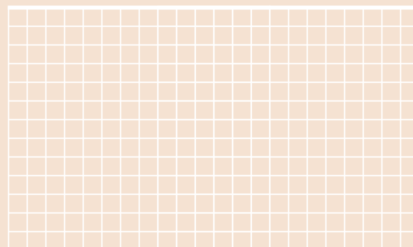
$f_2(x) = \frac{2x - 1}{x}$



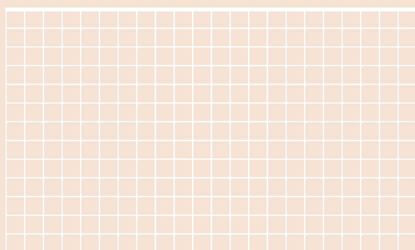
$f_3(x) = \frac{x - 3}{2x - 6}$



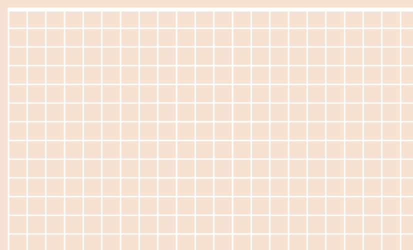
$f_4(x) = \frac{3 - x}{1 + x}$



$f_5(x) = \frac{2x - 6}{-3 - x}$

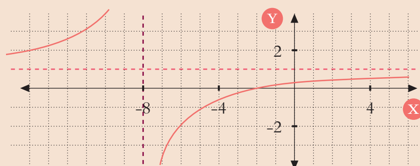


$f_6(x) = \frac{4 - 2x}{x + 1}$

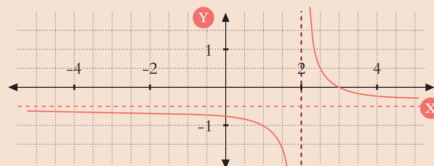


5. Encuentren la fórmula de las funciones representadas por los siguientes gráficos:

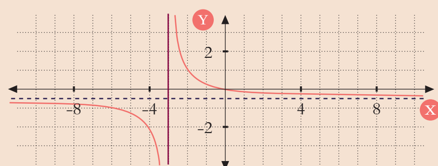
a.



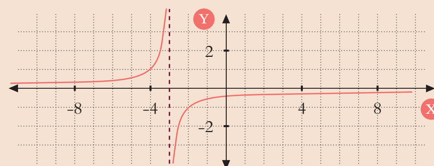
b.



c.



d.



6. Encuentren posibles valores de los números reales **a**, **b**, **c** y **d** para que la función $f(x) = \frac{ax - b}{cx + d}$

a. tenga asíntotas en $x = 3$ e $y = 2$;

b. tenga asíntota vertical en $x = -3$ y 2 sea raíz;

c. tenga asíntota horizontal en $y = 4$, tenga ordenada al origen en 0 y su gráfica pase por $\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

7. Encuentren la intersección entre las gráficas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{4x + 2}{x + 1}$ $g(x) = \frac{3x}{2 - x}$

b. $f(x) = \frac{2x-1}{2-4x}$ $g(x) = \frac{x-3}{x}$

c. $f(x) = -\frac{x-4}{x+1}$ $g(x) = -2x + 0{,}5$

d. $f(x) = -\frac{3x-5}{x-1}$ $g(x) = x - 1$

8. Encuentren los valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifican las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{2x-1}{x-1} \geq 3$

b. $\frac{x+2}{x-1} < -2$

c. $\frac{2x-1}{2-4x} > 2$

d. $\frac{x-3}{x} > 1$

e. $\frac{2}{x} > 6$

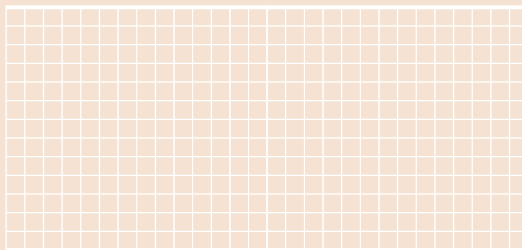
f. $\frac{3x-1}{2-x} < 5$

g. $\frac{x-1}{x+1} < 0$

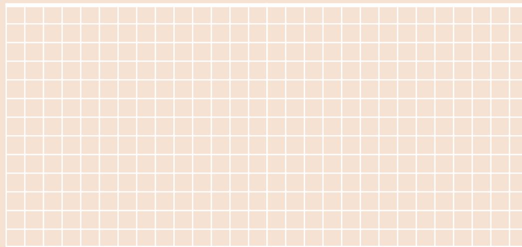
h. $\frac{2x-1}{x+2} < 5$

9. Analicen gráficamente para qué valores de **x** se cumple f(x) > g(x).

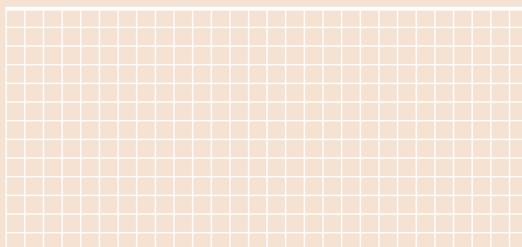
a. $f(x) = \frac{4x+2}{x+1}$ $g(x) = \frac{3x}{2-x}$



b. $f(x) = \frac{2x-1}{2-4x}$ $g(x) = \frac{x-3}{x}$



c. $f(x) = -\frac{x-4}{x+1}$ $g(x) = -2x + 0,5$



10. Calculen el dominio de las siguientes funciones racionales:

a. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - x - 3}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1}$

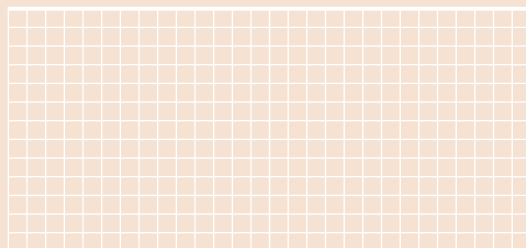
11. Grafiquen las siguientes funciones y hallen:

a. Dominio e imagen.

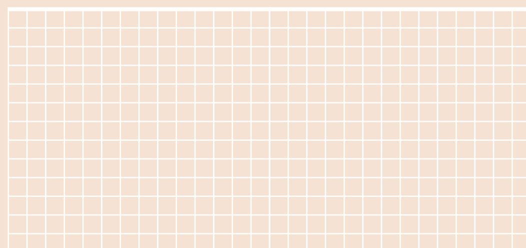
b. Asíntotas.

c. Ceros, y conjuntos de positividad y negatividad.

I. $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9}$



II. $f_2(x) = \dfrac{3x^3 - 6x^2 - 15x + 18}{2x^3 - 6x^2 - 12x + 16}$



ALUMNO CURSO FECHA

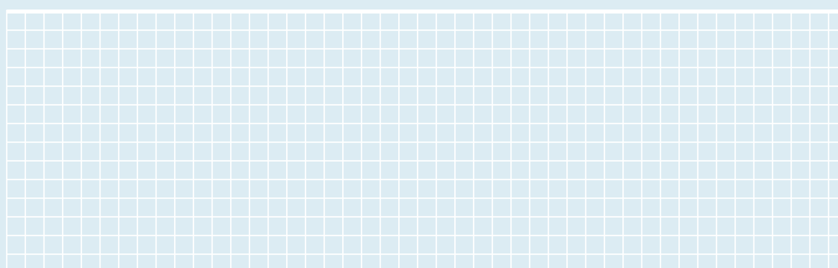
1. Se tienen rectángulos de 150 cm^2 de superficie:

a. Completar la siguiente tabla:

Largo del rectángulo (cm)	10	15	25		
Ancho del rectángulo (cm)				30	75

b. Buscar una fórmula que permita calcular el ancho de estos rectángulos en función del largo.

c. Graficar la función hallada en **b.**



2. Dadas las funciones: $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ $g(x) = \frac{3x-6}{2x-4}$

a. encontrar el dominio, la imagen y las asíntotas, si las tuvieran;

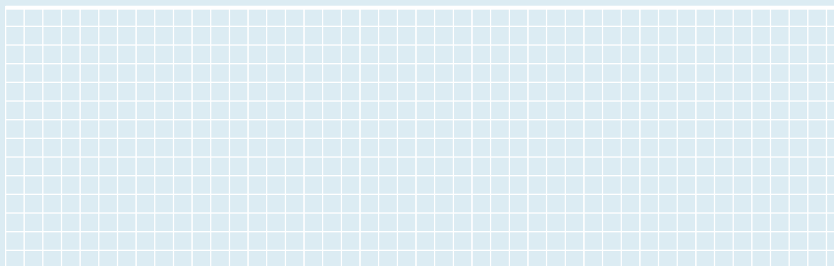
b. calcular la raíz y la ordenada al origen de cada una;

c. encontrar los puntos de intersección entre ambas funciones;

d. determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los conjuntos de positividad y negatividad de cada una;

ALUMNO CURSO FECHA

e. graficar ambas funciones.



3. Encontrar los valores de **x** que verifican las inecuaciones:

a. $\frac{2-3x}{x-1} < 2$

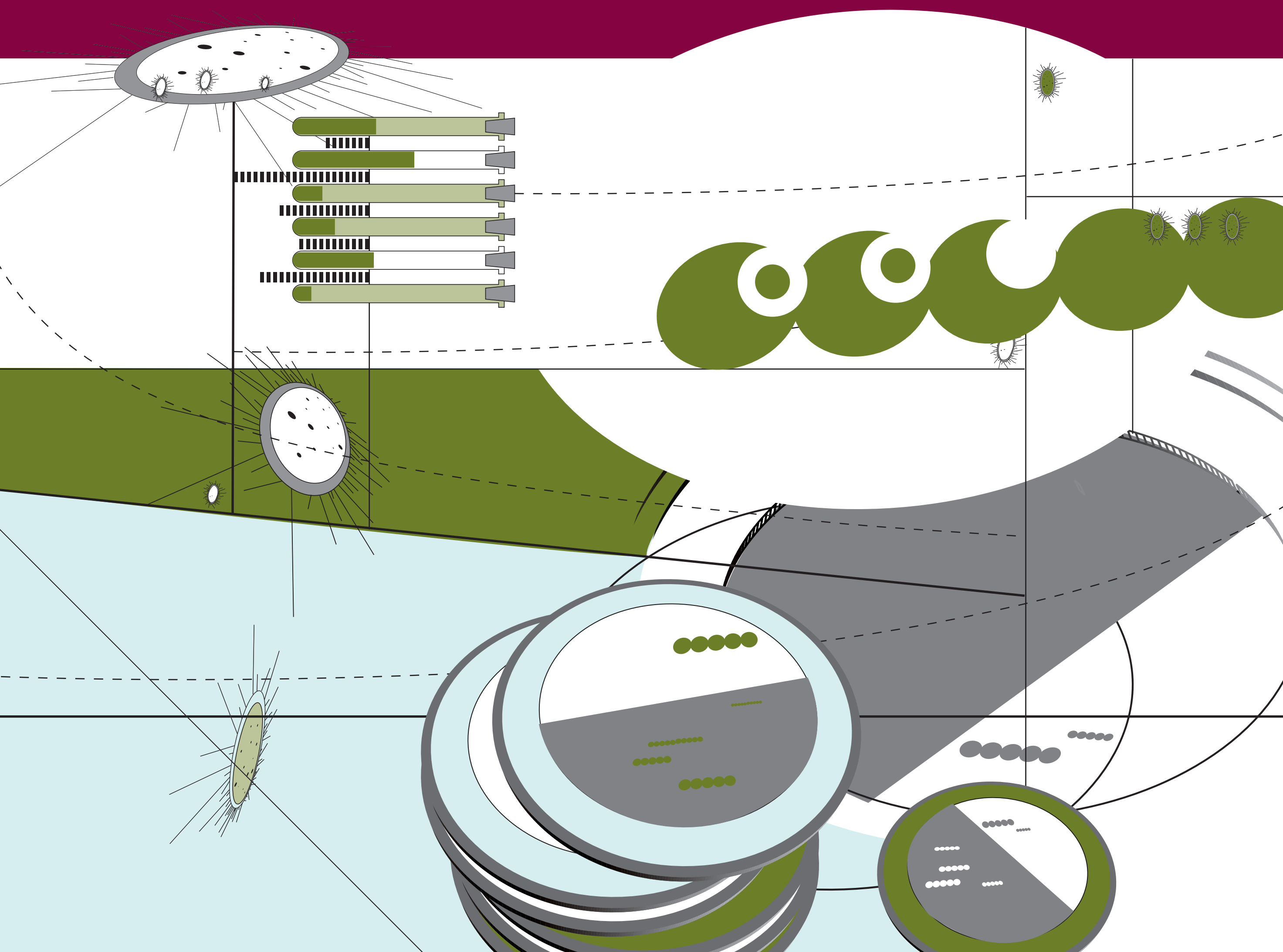
b. $\frac{3-x}{x} > -1$

c. $\frac{5-2x}{1-x} < 1$

ALUMNO CURSO FECHA

3 Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En ciencias como Biología, Química y Economía se estudian magnitudes que tienen un porcentaje fijo de crecimiento o decrecimiento cada cierto período. Estas situaciones se modelizan a través de funciones exponenciales.



Cuando resuelvan nuevas situaciones, no se olviden de revisar la resolución de los problemas anteriores para analizar si alguna estrategia puede volver a utilizarse.

¿Sabían que...?
Godfrey Harold Hardy (1877-1947) fue un matemático inglés, hijo de un tesorero y maestro de arte y de una maestra. Aunque sus padres eran inteligentes y poseían algunas habilidades matemáticas, como eran pobres no pudieron acceder a la educación universitaria. En su juventud, Hardy no mostró la pasión de otros matemáticos; sin embargo, obtuvo una beca para entrar en el Winchester College, que era uno de los mejores colegios especializados en Matemática. Le disgustaba todo lo que tuviera que ver con la escuela, salvo jugar juegos de pelota y cricket, otra de sus pasiones. Es importante notar que Hardy fue un hombre muy honesto, en especial con sus habilidades, fortalezas y debilidades. Hizo muchos aportes en matemática pura, pero pensó que éstos nunca podrían ser aplicados. Sin embargo, él encontró una ley que describe cómo la proporción de características dominantes y recesivas podría propagarse a una gran población. Hardy la consideró poco importante, pero ha resultado fundamental en la distribución de los grupos sanguíneos.
A él debemos la frase: “Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más duraderos que los de estos últimos, es debido a que están hechos de ideas. Los modelos del matemático, como los del pintor o los del poeta, deben ser hermosos. La belleza es la primera prueba; no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas”.

Problema 1

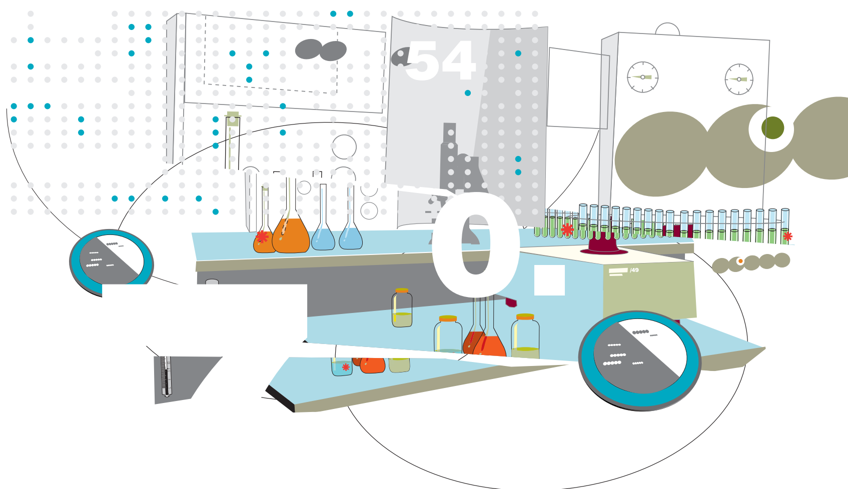
En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Se observa que, al reproducirse, la masa de la población aumenta un 15% cada hora. Al comienzo, el cultivo de bacterias tiene una masa de 50 g. ¿Cuál será la masa de las bacterias después de 2 horas? ¿Y después de 10 horas? ¿Y después de 25 horas? Encuentren una fórmula que permita calcular la masa del cultivo en función del tiempo. Grafiquen la función encontrada.

Problema 2

En el banco “El ahorro” se obtiene una tasa de interés del 1,5% mensual por la colocación de dinero a plazo fijo. Un ahorrista deposita $1500. ¿Cuál será el monto de su cuenta después de tres meses? ¿Y después de un año? Hallen una fórmula que permita calcular el monto en la cuenta del ahorrista en función del tiempo. Grafiquen la función encontrada. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia después de un año?

Problema 3

Las sustancias radiactivas tienen la propiedad de desintegrarse al emitir espontáneamente partículas alfa, electrones y rayos gamma, por lo cual pierden masa a medida que pasa el tiempo. En un laboratorio, se hace la observación de una sustancia radiactiva que pierde el 2,5% de su masa cada día. En un principio, la masa de dicha sustancia es de 3 kg. ¿Cuál será la masa de dicha sustancia después de una semana? ¿Y 30 días después? ¿Y al año? Escriban una fórmula que permita calcular la masa de esta sustancia en función del tiempo. Grafiquen la función hallada.



Problema 1

Empecemos haciendo una tabla que nos muestre cómo va cambiando la masa en función del tiempo:

Tiempo en horas	Masa en gramos
0	50
1	$50 + 50 \cdot \frac{15}{100} = 57,5$
2	$57,5 + 57,5 \cdot \frac{15}{100} = 66,125$

Podemos así contestar a la primera pregunta: después de 2 horas, la masa es de 66,125 gramos.
También se ve que para avanzar una hora es necesario saber cuál es la masa de la hora anterior, para lo cual será necesario analizar un poco más las cuentas realizadas en estos pasos.
De la hora 0 a la hora 1, la masa aumenta un 15%; por lo tanto, la masa que habrá a la primera hora será un 115% de la masa inicial, o sea:

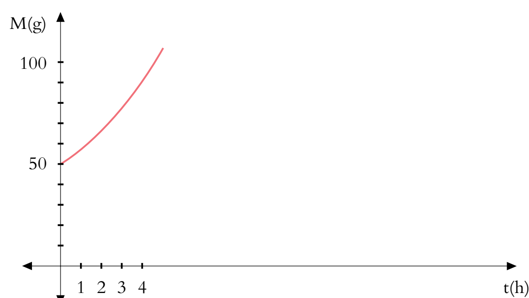
hora 1 $\rightarrow 50 \cdot \frac{115}{100} = 50 \cdot 1,15$

A la segunda hora, también habrá un 115% de lo que había en la hora 1, o sea:
hora 2 $\rightarrow (50 \cdot 1,15) \cdot \frac{115}{100} = 50 \cdot 1,15 \cdot 1,15 = 50 \cdot 1,15^2$

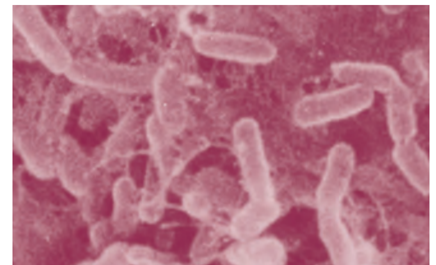
Por lo tanto, cada hora que pasa se multiplica la masa anterior por 1,15. A la hora 10, habremos multiplicado 10 veces por 1,15. Tenemos, entonces, que la masa 10 horas después será de $50 \cdot 1,15^{10} = 202,278$ g, aproximadamente.
Así, la forma de encontrar la masa después de **t** horas es:

hora **t** $\rightarrow 50 \cdot 1,15^t$

La fórmula de la masa en función del tiempo será $M(t) = 50 \cdot 1,15^t$ y la representación gráfica:



1. Determinen si la tabla que se encuentra en esta página corresponde a una función lineal.



¿Sabían que...?
Una bacteria (del griego *bakteria*: "bastón") es un organismo unicelular microscópico que carece de núcleo diferenciado. Se reproduce por división celular sencilla y puede vivir en forma independiente. En su interior posee los dos tipos de ácidos nucleicos, el ácido desoxirribonucleico (ADN) y el ribonucleico (ARN). Las bacterias pueden atacarse con antibióticos, y un tipo de antibiótico puede destruir varios tipos de bacterias. Algunas enfermedades causadas por bacterias son: cólera, tétanos, lepra, tuberculosis, sífilis, y otras.

¿Cómo se lee?
$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ números reales positivos
$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ números reales negativos
≈ aproximadamente

Algo más…



Para realizar una potencia con la calculadora, se utiliza la tecla que dice x^y. Por ejemplo, para hacer $0{,}5^{3,4}$ se pone 0,5, se aprieta la tecla x^y luego 3,4. Al apretar la tecla = se obtiene el resultado. En este caso es, aproximadamente, 0,09473.

2. Determinen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifiquen sus respuestas. En todos los casos, **a** es un número real positivo.

a. $a \cdot a^n = a^{n+1}$

b. $a^n \cdot a^n = a^{n^2}$

c. $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$

d. $a^n : a = a^{n-1}$

e. $a^{-n} = \frac{1}{a^{-n}}$

Función exponencial

Hemos encontrado aquí una función en la cual la variable se encuentra en el exponente: se llama "función exponencial".

Una **función exponencial** es una función de la forma:
$f(x) = k \cdot a^x$ donde $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ con $a \neq 1$

Es necesario que **a** sea positivo para que se pueda utilizar como dominio cualquiera de todos los números reales. Para entender esto, analicemos las definiciones de potencia para los distintos conjuntos numéricos:

- Si $x = 0$, se define $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)
- Si $x \in \mathbb{N}$, se define $a^x = \underbrace{a.a.a.......a.a}_{x \text{ veces}}$
- Si **x** es un entero negativo ⇒ – x es el opuesto de un negativo, entonces –x es positivo ⇒ $-x \in \mathbb{N}$ ⇒ definimos $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ (si $a \neq 0$)
- Si **x** es una fracción ⇒ $x = \frac{p}{q}$ ⇒ $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

En esta última definición, es importante analizar si **a** puede tomar cualquier valor. El problema que tenemos es que **a** sea negativo y la raíz sea par, por ejemplo:

$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-4)}$

No existe esta expresión en el conjunto de los números reales, ya que ningún número elevado al cuadrado puede dar negativo. Por este motivo es que para que la función exponencial tenga por dominio los números reales, es necesario que **a** sea positivo.

- Si **x** es un número irracional, para estimar el valor de a^x se toman aproximaciones racionales de **x**, y tomando estos números como exponentes obtendremos aproximaciones de a^x.

Ejemplos:

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ $\quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ $\quad 4^{\pi} \approx 4^{3,1416} \approx 31{,}5445$

Las siguientes propiedades, que ya vimos para los números naturales, siguen valiendo cuando el exponente es un número cualquiera.

Propiedades

$a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$ $\quad$ $a^x : a^y = a^{x-y}$ $\quad$ $(a^x)^y = a^{x.y}$

Analicemos si la función que encontramos en la resolución del problema 1 cumple con la condición de que en cualquier momento, si pasa una hora, la masa de las bacterias es un 15% mayor.
Si **x** es el momento del que hablábamos ⇒ x + 1 será el tiempo una hora después.
Bacterias al tiempo x → $50 \,.\, 1{,}15^x$ (1)
Bacterias al tiempo x + 1 → $50 \,.\, 1{,}15^{x+1}$ (2)

Si (1) es el 100%, queremos ver qué porcentaje es (2) de (1), para lo cual hacemos $\frac{(1)}{(2)} \,.\, 100$

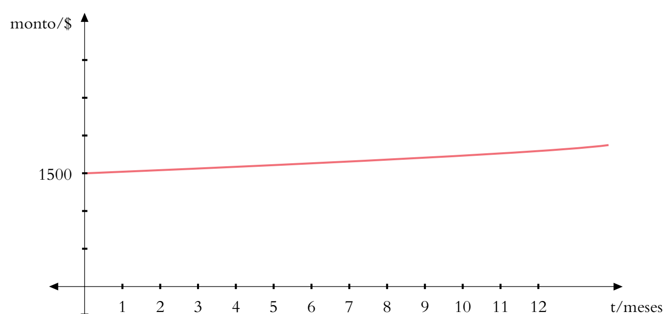
$$\frac{50 \,.\, 1{,}15^{x+1}}{50 \,.\, 1{,}15^{x}} \,.\, 100 = 1{,}15^{x+1-x} \,.\, 100 = 1{,}15 \,.\, 100 = 115\%$$

Como una hora después tenemos 115% respecto del momento **x**, la masa aumentó un 15%. Vemos que esta función cumple con las condiciones que pedía el problema. Modeliza perfectamente la situación.

Problema 2

En este problema, se comienza con $1500 y, como cada mes aumenta 1,5%, se tiene 101,5% del mes anterior. Por lo tanto, cada mes que pasa se multiplica la cantidad por 1,015, con lo que se obtiene la función:

$f(x) = 1500 \,.\, 1{,}015^t$ donde **t** es el tiempo en meses.
Respondamos a las preguntas:
a. A los tres meses tendrá $1500 \,.\, 1{,}015^3 \approx$ $1568,52
b. Al año tendrá $1500 \,.\, 1{,}015^{12} \approx$ $1793,43
c. Si comenzó con $1500, en un año ganó $293,43, que es el 19,56% de lo que invirtió. Observen que no es 1,5 . 12 = 18%.
El gráfico de **f** es:



3. La masa de una población de bacterias aumenta un 25% por hora. En un determinado momento, se colocan 120 g de bacterias en una cubeta. ¿Cuántos gramos de bacterias habrá al cabo de una hora? ¿Y de 2 horas? ¿Y de 3 horas?¿Y de **t** horas? Represanten gráficamente la masa total de bacterias en función del tiempo.

4. Dadas las mismas condiciones que en el ejercicio anterior, pero teniendo una población inicial de 60 g de bacterias y un porcentaje de aumento del 30% por hora, realicen el gráfico en el mismo sistema de ejes que el anterior.

5. ¿Qué conclusiones pueden extraer de los gráficos realizados en los ejercicios anteriores respecto de la ordenada al origen, del crecimiento de las funciones y de sus asíntotas?

6. Una sustancia radiactiva pierde el 50% de su masa cada año. En el año 1950, la masa era de 15 kg.

a. ¿Cuál es la función que determina la masa remanente en función del tiempo?

b. ¿Cuál será la masa en el año 2003?

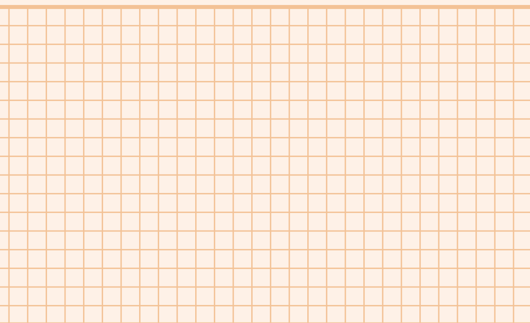
7. En un banco, ofrecen una tasa de interés del 1% mensual en los depósitos a plazo fijo. Se coloca un capital de \$500 durante un año. ¿Cuál será el monto que se puede retirar al finalizar el año?

8. Grafiquen las siguientes funciones exponenciales y determinen su imagen.

a. $f(x) = 2^x$ **d.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b. $f(x) = 2^x - 1$ **e.** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

c. $f(x) = -2 \,.\, 2^{x-1}$ **f.** $f(x) = (-2) \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$



Problema 3

En este problema, se comienza con 3 kg de sustancia y se pierde 2,5% por día, es decir que cuando pasa un día la nueva masa es un 100% – 2,5% = 97,5% . Por lo tanto, cada día se multiplica la masa por 0,975. La fórmula correspondiente es:

$M(t) = 3 \,.\, 0{,}975^t$ donde **t** está indicado en días y M, en kg.

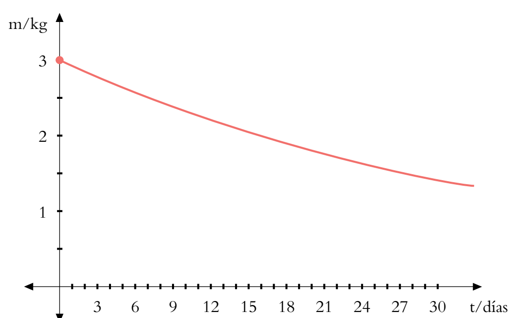
Contestemos a las preguntas:

a. La masa una semana después será: $3 \,.\, 0{,}975^7 \approx 2{,}513$kg.

b. La masa 30 días después será: $3 \,.\, 0{,}975^{30} \approx 1{,}403$kg.

c. La masa un año después será: $3 \,.\, 0{,}975^{365} \approx 0{,}0003$kg.

La masa va disminuyendo, a diferencia de los problemas anteriores, en los que las funciones eran crecientes. Veamos el gráfico:



Conclusión

En las funciones exponenciales $f(x) = k \,.\, a^x$

- **Si k > 0, y = 0 es asíntota horizontal y además:**
- **Si a > 1, la función será creciente.**
- **Si 0 < a < 1, la función será decreciente.**

Analizando los gráficos anteriores, podemos ver que las funciones exponenciales que tienen como dominio a los números reales y como codominio a los números reales positivos, son biyectivas.

Propiedad

Las funciones exponenciales tienen la propiedad que a intervalos iguales de **x** se obtienen porcentajes iguales de crecimiento o decrecimiento en **y.**

Analicemos la siguiente tabla

x	f(x) = k . a^x
x + h	$f(x + h) = k \,.\, a^{x+h}$

¿Qué porcentaje es $k \cdot a^{x+h}$ de $k \cdot a^x$? Para responder a esta pregunta hacemos:

$$\frac{k \cdot a^{x+h}}{k \cdot a^x} \cdot 100 = a^{x+h-x} \cdot 100 = a^h \cdot 100$$

Por lo tanto, si en **x** el intervalo es de longitud **h**, el porcentaje es de $a^h \cdot 100\%$, que sólo depende de **h**.

Problema 4

Una sustancia radiactiva pierde el 3% de su masa cada día. Diez días después de comenzada la observación, se tienen 150 g. ¿Cuántos gramos de sustancia había al comenzar la observación? ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por hora? ¿Y por semana? ¿Después de cuánto tiempo se reduce la masa de la sustancia a la mitad?

Problema 5

Martín está buscando el banco que le dé mejores beneficios. Buscando en Internet, en la página de los bancos, encuentra que el banco "Ave" da por los depósitos un interés del 12% anual. El banco "Fénix" ofrece el 1% mensual capitalizable cada mes. Fernando le dice que los dos bancos le ofrecen lo mismo, pero Martín dice que no. ¿Quién tiene razón?

Problema 4

La función que estamos buscando es exponencial y como disminuye el 3% diariamente, cada día queda el 97% de lo que había el día anterior; entonces, la masa se multiplica por 0,97. Es necesario encontrar la masa inicial. Para esto se puede usar la información de que 10 días después la masa es de 150 g. Por lo tanto:

$k \cdot 0{,}97^{10} = 150 \Rightarrow k = \dfrac{150}{0{,}97^{10}} \approx 203{,}417$ g es la cantidad de sustancia que había al comenzar la observación.

Observen que no es lo mismo agregarle el 3% 10 veces, que sería $150 \cdot 1{,}03^{10} = 201{,}587$; no es el procedimiento correcto, porque si a 201,587 le quitamos el 3% 10 veces, no da 150. La función que permite calcular la masa de la sustancia en función del tiempo es:
$M(t) = 203{,}417 \cdot 0{,}97^t$ donde **t** está en días y M en gramos.
Utilizando esta fórmula podemos contestar a las otras preguntas:

9. ¿Puede existir una función exponencial que pase por los siguientes puntos? ¿Por qué?
a. (2; 5) (7; –2)

b. (1; 3) (2; 4,5) (3; 6,75)

c. (2; 3) (5; 7) (8; 5)

10. Una población de bacterias se reproduce a razón de 24% cada 3 días. ¿Cuál es la tasa de crecimiento diaria?

11. En una población de bacterias que aumenta un 25% cada hora, en un determinado momento hay 586 g de bacterias. ¿Cuántos gramos había 3 horas antes?

¿Sabían que...?
El carbono 14 (C14) es un isótopo radiactivo del carbono. La radiación cósmica secundaria provoca en la atmósfera la formación continua de C14. Éste se mezcla con el carbono 12 y así el anhídrido carbónico atmosférico contiene una proporción constante de C14.
Los seres vivos absorben C14; por lo tanto, en toda materia viva aparece una concentración permanentemente renovada de C14, que se mantiene constante.
Cuando el ser vivo muere, su intercambio con la atmósfera cesa, y la concentración de C14 comienza a disminuir a medida que éste se desintegra sin reponerse. Como se sabe que la vida media del C14 es de 5730 años, si se determina cuál es la cantidad de C14 en un fósil, se puede saber cuántas veces se redujo su masa a la mitad y así se determina el tiempo que lleva muerto. Se utiliza el C14 y no otra sustancia radiactiva debido a que su vida media es grande y permite así determinar edades de fósiles muy antiguos.



Como el porcentaje sólo depende del período que pase y no de cuándo ocurre, analizaremos el porcentaje cuando pasan 1 hora y 1 semana desde el comienzo. Observemos la tabla:

t	$1h = \frac{1}{24}$ día	1 semana = 7 días
masa	$203{,}417 \cdot 0{,}97^{\frac{1}{24}}$	$203{,}417 \cdot 0{,}97^{7}$
	203,16	164,36

En una hora disminuyó 0,257 g, que es el 0,13% de 203,417 g, y en una semana disminuyó 39,057 g, que es el 19,20%.
Observen que ni 0,13 es 3% : 24 ni 19,20 es 3% : 7.
La última pregunta se refiere al período en que se reduce la masa a la mitad, o sea, al 50%. Como vimos en la propiedad de la página 62, esto no depende de cuándo comience a contar el tiempo.
Como el porcentaje en un período **h** es a^h . 100%, se plantea:

$a^h \cdot 100\% = 50\% \Rightarrow 0{,}97^h = 0{,}5$

La única manera que tenemos, por ahora, de averiguar **h** es aproximando. En este caso, el valor aproximado es de 22,76 días. A este valor se lo llama "vida media" de la sustancia.

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo en que su masa se reduce a la mitad.

Ésta es una propiedad exclusiva de las sustancias radiactivas, y cada sustancia tiene una vida media determinada. Por ejemplo, la vida media del sodio es de 15 días, la del potasio es de 12 horas y la del carbono 14, de 5730 años.

Problema 5

En el banco "Ave" se multiplica cada año el capital por 1,12.
En el banco "Fénix" cada mes el dinero se multiplica por 1,01; por lo tanto, en un año se multiplica 12 veces por 1,01. Como $1{,}01^{12} = 1{,}1268$, este banco le da un interés del 12,68% anual.
Por lo tanto, Martín tenía razón: no era lo mismo.

En el problema 4 se planteó la siguiente ecuación:
$0{,}97^t = 0{,}5$
Para hallar la solución de esta ecuación, tuvimos que ir aproximando el valor de **t**. Con el objetivo de resolver este tipo de ecuaciones, aprenderemos una nueva operación.

Logaritmos

Se llama **logaritmación** a la operación por la cual se calcula el exponente al que se tiene que elevar un número **a** positivo y distinto de 1 para obtener otro número **b**. Esto se escribe:

$\log_a b$ y se lee logaritmo en base **a** de **b**.

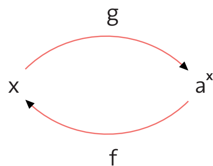
Se cumple que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Con esta definición, lo que se buscaba en el problema 4 era $\log_{0,97} 0,5 = 22,76$, aunque esto todavía no ayuda a encontrar el valor. Para esto, estudiaremos una serie de propiedades del logaritmo.

También podemos analizar que **b** debe ser positivo para que pueda calcularse el logaritmo, ya que así **b** resulta ser una potencia de **a**; por ser **a** positivo, **b** también lo será.

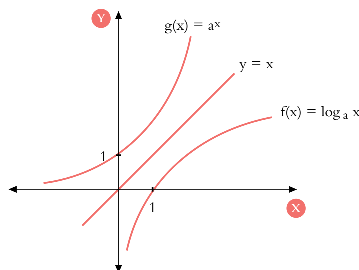
Por lo tanto, el dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es Dom $f = \mathbb{R}^+$.

La función $f(x) = \log_a x$ es la inversa de $g(x) = a^x$, ya que **g** calcula el resultado de una potenciación sabiendo el exponente, y **f** calcula el exponente sabiendo el resultado:

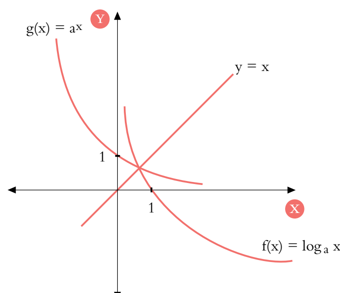


Al ser estas funciones inversas, sus gráficos serán simétricos respecto de la recta $y = x$. Como $g(x)$ tiene gráficos distintos si $a > 1$ ó si $0 < a < 1$, también tendremos gráficos distintos para $f(x)$ según sea $a > 1$ ó $0 < a < 1$. En ambos casos, la recta $y = 0$ es asíntota vertical.

$a > 1$



$0 < a < 1$



12. Calculen utilizando la definición:

a. $\log_a a$ ____________

b. $\log_2 \frac{1}{2}$ ____________

c. $\log_a 1$ ____________

d. $\log_{10} 100$ ____________

e. $\log_{10} 1000$ ____________

f. $\log_{10} 0,1$ ____________

g. $\log_{\frac{1}{5}} 5$ ____________

h. $\log_{\frac{1}{5}} 125$ ____________

i. $\log_3 3$ ____________

j. $\log_5 125$ ____________

k. $\log_6 \frac{1}{36}$ ____________

13. Grafiquen las siguientes funciones. Luego, para cada una, determinen dominio, imagen, ceros, positividad y negatividad.

a. $f_1(x) = \log_2 x$ **b.** $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c. $f_3(x) = \log_3 x$ **d.** $f_4(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

14. Grafiquen las siguientes funciones, calculando previamente su dominio.

a. $f(x) = \log_2(x - 1)$ **b.** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$

c. $f(x) = 2 \log_2 x - 2$

15. Pasen a notación exponencial o logarítmica según corresponda (por ejemplo $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$).

a. $6^3 = 216$ __________

b. $\log_{10} 1000 = 3$ __________

c. $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ __________

d. $10^{-2} = \frac{1}{100}$ __________

e. $4^{\frac{1}{2}} = 2$ __________

16. Sabiendo que $\log_2 3 \approx 1{,}585$ y $\log_2 5 \approx 2{,}322$ hallen: $\log_2 \left(\frac{\sqrt{8 \,.\, 27}}{60 \,.\, \sqrt[3]{900^7}} \right)$

____

____

____

____

____

17. Sabiendo que $\log_3 7 \approx 1{,}771$ y $\log_3 5 \approx 1{,}465$ hallen

$\log_3 \left(\frac{\sqrt[4]{441^{-2}} \,.\, 21}{105^{-5}} \right)$

____

____

____

____

____

¿Cómo se lee...?

$\Leftrightarrow$ es equivalente a o si y sólo si

Propiedades

▮ $\log_a 1 = 0$

Esto se cumple pues $a^0 = 1$.

▮ $\log_a (b \,.\, c) = \log_a b + \log_a c$

▮ $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

Analicemos estas propiedades. Supongamos que:

$\log_a b = x$	$\Rightarrow$	$a^x = b$	(1)
$\log_a c = y$	$\Rightarrow$	$a^y = c$	(2)
$\log_a (b \,.\, c) = z$	$\Rightarrow$	$a^z = b \,.\, c$	
$\log_a (b : c) = t$	$\Rightarrow$	$a^t = b : c$	

Para probar la primera propiedad, tenemos que verificar que $z = x + y$, o sea, probar que $a^{x+y} = b \,.\, c$

$a^{x+y} = a^x\, a^y = b \,.\, c$ usando (1) y (2).

Entonces, el exponente al que hay que elevar **a** para que dé $(b \,.\, c)$ es $x + y$; por lo tanto, el logaritmo en base **a** de $(b \,.\, c)$ es $x + y$, que es $\log_a b + \log_a c$.

Para probar la segunda propiedad, tenemos que verificar que $t = x - y$, o sea, probar que $a^{x-y} = b : c$.

$a^{x-y} = a^x : a^y = b : c$ usando (1) y (2).

Entonces, el exponente al que hay que elevar **a** para que dé $(b : c)$ es $x - y$; por lo tanto, el logaritmo en base **a** de $(b : c)$ es $x - y$, que es $\log_a b - \log_a c$.

▮ $\log_a (b^c) = c \,.\, \log_a b$

Llamemos:

$\log_a b = x$	$\Rightarrow$	$a^x = b$	(3)
$\log_a (b^c) = z$	$\Rightarrow$	$a^z = b^c$	

Debemos probar que $z = c \,.\, x$, o sea que $a^{cx} = b^c$.

$a^{cx} = (a^x)^c = b^c$ utilizando (3). Entonces, el exponente al que hay que elevar **a** para que dé b^c es $c \,.\, x$; por lo tanto, el logaritmo en base **a** de b^c es $c \,.\, x$ que es $c \,.\, \log_a b$.

▮ Cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Para comprobar esta propiedad, lo que debemos calcular es el exponente al que hay que elevar **a** para que dé **b**. Supongamos que este valor es **x**.

$$a^x = b \Rightarrow \text{tomemos } \log_c \text{ en ambos miembros}$$
$$\log_c a^x = \log_c b \Rightarrow \text{usando la propiedad anterior}$$
$$x \,.\, \log_c a = \log_c b \Rightarrow \text{como } x = \log_a b$$
$$\log_a b \,.\, \log_c a = \log_c b \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Otras propiedades muy sencillas de probar son:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

Si observan la calculadora, podrán ver que hay dos teclas que tienen que ver con el logaritmo. Una es **log** y la otra **ln**.



log quiere decir $\log_{10}$.
ln significa logaritmo natural o logaritmo en base **e**, donde **e** es un número irracional que está entre 2 y 3. Para encontrar aproximaciones de ese número se le van dando valores naturales, cada vez mayores, a **n** en la expresión:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Si tomáramos, por ejemplo, n = 3000, tenemos que
$e \approx 2{,}7178289$.
Analizaremos esto con más profundidad en el Libro 3.

Veamos ahora cómo utilizamos estas propiedades y la calculadora para hallar el valor que habíamos aproximado tanteando en el problema 4. Recordemos que teníamos que resolver la ecuación:

$0{,}97^t = 0{,}5$ tomemos log en ambos miembros
$\log (0{,}97^t) = \log 0{,}5$ usando la propiedad de la potencia
$t \,.\, \log 0{,}97 = \log 0{,}5$ usando la calculadora
$t \,.\, (-0{,}0132283) = -0{,}30103$
$t = -0{,}30103 : (-0{,}0132283) \Rightarrow t \approx 22{,}75651444$
Por lo tanto, resolvimos la ecuación despejando y utilizando la calculadora.

¿Sabían que...?
John Napier (1550-1617) nació en Escocia. Estudió en la Universidad de St. Andrews en la que ingresó a la edad de 13 años y terminó sus estudios en Europa. Primero se interesó por la Teología y fue recién en Europa donde se volcó a la alta Matemática. En 1593, como un ferviente protestante, formó parte de las controversias religiosas de la época. Sus estudios en Matemática fueron sólo un *hobby*; sin embargo, fue el inventor de los logaritmos, y sus contribuciones incluyen fórmulas que se utilizan para resolver triángulos esféricos y la invención del llamado “Hueso de Napier”, usado para multiplicar, dividir y sacar raíces cuadradas y cúbicas mecánicamente.
La discusión de Napier sobre los logaritmos apareció en *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614. Dos años más tarde, Edward Wright tradujo este texto del latín al inglés y, en su prólogo, dijo respecto de los logaritmos: “Lo más tedioso en el quehacer matemático es la multiplicación, división y extracción de raíces cúbicas y cuadradas de números grandes, que además de utilizar mucho tiempo son la mayor parte de los errores (...) Los logaritmos permiten transformar estos cálculos en sumas, restas, divisiones por 2 y por 3”.
Para poder utilizar los logaritmos, como no existían las calculadoras, se crearon unas tablas con los resultados de los logaritmos de los números.
Se encontró que, mejor que trabajar con la base “**e**” que utilizaba Napier, era preferible utilizar la base 10, y con esto Briggs comenzó a construir la tabla.

Algo más…
Cuando no existían las calculadoras, para hallar, por ejemplo, $\sqrt{1234}$, utilizaban los logaritmos de la siguiente manera:

$\log \sqrt{1234} = \frac{1}{2} \cdot \log 1234$

Buscaban en la tabla log 1234, lo dividían por 2 (que es una cuenta fácil de hacer) y entonces tenían que:

$\log \sqrt{1234} = 1{,}545657$

Buscaban en la tabla qué número tenía por logaritmo 1,545657 y así obtenían el valor buscado, en este caso:
35,128289
Observen que con la tabla este cálculo se reduce a una división por 2.

18. Se tiene una sustancia radiactiva que pierde el 3,4% de su masa cada 3 horas. Después de un día de comenzada la experiencia, la masa es de 379,129 kg.
a. ¿Cuál es la masa inicial?
b. ¿Cuál es la función que determina la masa (en kg) en función del tiempo (en horas)?
c. ¿Cuál será la masa medio año después?
d. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por día? ¿Y por semana? ¿Y por mes? ¿Y por hora?
e. ¿Después de cuántos días la masa será menor que 150 kg?

Problema 6

En un laboratorio se observa una sustancia radiactiva. Uno de los científicos nota que 6 días después de comenzada la observación, la masa es de 1,5 kg, y 15 días y medio después, la masa es de 950 g.
a. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la masa remanente en función del tiempo?
b. ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?
c. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por día, semana y hora?

Problema 6

Sabemos que ésta es una función exponencial, o sea,
$m = k \cdot a^x$
Los datos que nos proporcionan son:

x (días)	6	21,5
masa (kg)	1,5	0,950

Entonces se verifica:

$k \cdot a^6 = 1{,}5$ (como $a \neq 0$) $\Rightarrow k = \frac{1{,}5}{a^6}$ (1)

$k \cdot a^{21{,}5} = 0{,}950 \Rightarrow k = \frac{0{,}95}{a^{21{,}5}}$ (2)

Al igualar (1) con (2) obtenemos:

$$\frac{1{,}5}{a^6} = \frac{0{,}95}{a^{21{,}5}} \Rightarrow \frac{1{,}5 \cdot a^{21{,}5}}{a^6} = 0{,}95 \Rightarrow$$

$a^{21{,}5-6} = 0{,}95 : 1{,}5$ $\qquad a^{15{,}5} = 0{,}6333$

Tomamos ln en ambos miembros $\Rightarrow \ln a^{15{,}5} = \ln 0{,}6333$

$15{,}5 \cdot \ln a = -0{,}4568$ $\qquad \ln a = -0{,}4568 : 15{,}5$

$\ln a = -0{,}0295 \Rightarrow a = e^{-0{,}0295} \Rightarrow a \approx 0{,}971$

Para calcular **k** bastará con reemplazar en (1) ó (2)

$k \approx 1{,}7897$

Por lo tanto:
a. La fórmula de la función es $m = 1{,}7897 \cdot 0{,}971^x$, donde **x** es el tiempo en días y **m** es la masa en kilogramos.

b. Para calcular la vida media, es necesario saber después de cuánto tiempo el porcentaje de decrecimiento es del 50%. Si el tiempo que pasa es **h**, el porcentaje es

$a^h . 100 \Rightarrow 0{,}971^h . 100 = 50 \Rightarrow 0{,}971^h = 0{,}5$

Resolviendo esta ecuación con logaritmos, como en la página anterior, tenemos:

$h = 23{,}55 \Rightarrow$ la vida media es de 23,55 días.

c. Para calcular los porcentajes:

Si el período de tiempo es de un día, el porcentaje de la masa es: $a^1 . 100 = 92{,}56\% \Rightarrow$ decrece 7,44%.

Si el período de tiempo es una semana = 7 días, el porcentaje de la masa es: $a^7 . 100 = 81{,}38\% \Rightarrow$ decrece 18,62%.

Si el período de tiempo es 1 hora = $\frac{1}{24}$ días, el porcentaje de la masa es: $a^{\frac{1}{24}} . 100 = 99{,}87\% \Rightarrow$ decrece 0,13%.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Vamos a plantear la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas y para ello utilizaremos algunos ejemplos.

Nos proponemos hallar los valores de **x** que verifican las siguientes igualdades:

a. $2^x . 8^{x+1} : 4^{2x} = (16^x)^{x-1}$

b. $2^x . 3^{x-1} = 5^x : 2^{x-1}$

c. $\log_3 (x-1) = 2$

d. $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 20$

e. $\log_2 x = x - 1{,}5$

Estas ecuaciones servirán para poner en práctica todas las propiedades de los logaritmos y las potencias que se trabajaron en este capítulo.

Para trabajar con la ecuación planteada en a.

$$2^x . 8^{x+1} : 4^{2x} = (16^x)^{x-1}$$



19. Se tiene una masa de 2350 kg de hidrógeno 3 cuya vida media es de 0,9 seg.

a. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se pierda un 97% de su masa?

b. ¿Cuál es la masa 2 minutos después?

20. Se realiza un depósito a plazo fijo. Dos meses después de colocado el dinero, el capital era de \$700, y 5 meses después, el capital ascendía a \$1300. ¿Cuáles fueron el capital inicial y la tasa de interés mensual?

21. ¿Cuál es la vida media de una sustancia radiactiva que pierde el 20% de su masa cada 10 horas?

22. Hallen los valores de **x** que verifican cada una de las siguientes igualdades.

a. $9^{2x-3} : 3^{x-2} = 27 \,.\, 81^{1-x}$

b. $4^{2x-1} : 8^{2-x} = 16 \,.\, 2^{2-2x}$

c. $3^{2-x} \,.\, (5^{x+1})^{2-x} \,.\, 6 = 3^{2x} : 7$

d. $\log_5 (3x-4) = -2$

e. $(4^{1-x})^{2-3x} \,.\, 2^{x+1} = 8^x \,.\, \frac{1}{2}$

Podemos observar que todas las bases de las potencias de esta ecuación se pueden escribir como potencias de 2, $(8 = 2^3, 4 = 2^2, 16 = 2^4)$

$$2^x \,.\, (2^3)^{x+1} : (2^2)^{2x} = [(2^4)^x]^{x-1}$$

Si usamos las propiedades de la potenciación que vimos en la página 61, tenemos:

$$2^x \,.\, 2^{3(x+1)} : 2^{2\,.\,2x} = 2^{4\,.\,x\,.\,(x-1)}$$
$$2^{x+3(x+1)-2\,.\,2x} = 2^{4\,.\,x\,.\,(x-1)}$$

Como la función $y = 2^x$ es inyectiva, si estas dos imágenes son iguales, entonces sus exponentes también lo serán:

$$x + 3(x+1) - 2\,.\,2x = 4\,.\,x\,.\,(x-1)$$
$$x + 3x + 3 - 4x = 4x^2 - 4x$$

Esto se transformó en una ecuación cuadrática de fácil resolución: $x = \frac{3}{2}$ ó $x = -\frac{1}{2}$

Para la ecuación planteada en b.

$$2^x \,.\, 3^{x-1} = 5^x : 2^{x-2}$$

Como no podemos escribir cada base fácilmente como potencias de un mismo número, la forma de resolver es distinta. Dado que entre las potencias sólo tenemos multiplicaciones y divisiones, tomamos logaritmos de ambos lados de la igualdad. Usamos alguno de los dos logaritmos que están en la calculadora:

$$\log(2^x \,.\, 3^{x-1}) = \log(5^x : 2^{x-2})$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos que vimos en la página 66.

$\log 2^x + \log 3^{x-1} = \log 5^x - \log 2^{x-2}$
$x \log 2 + (x-1) \log 3 = x \log 5 - (x-2) \log 2$
$0{,}30103x + 0{,}47712\,(x-1) \approx 0{,}69897x - 0{,}30103\,(x-2)$
$0{,}30103x + 0{,}47712x - 0{,}47712 \approx 0{,}69897x - 0{,}30103x + 0{,}60206$

Queda así una ecuación con números "un poco feos", pero de resolución sencilla. Utilizando la calculadora obtenemos:

$$0{,}38021x \approx 1{,}07918$$
$$x \approx 2{,}8384$$

Para resolver la ecuación planteada en c.

$$\log_3 (x-1) = 2$$

Solamente tenemos que recordar la definición del logaritmo. En este caso, 2 es la potencia a la que hay que elevar el 3 para que dé $x - 1$

$$\log_3 (x - 1) = 2 \;\Rightarrow\; x - 1 = 3^2$$

Resulta una ecuación muy simple, cuya solución es:

$$x = 10$$

Para resolver la ecuación planteada en d.

$$\log_2 x + \log_2 (x - 1) = \log_2 20$$

Utilizamos las propiedades de los logaritmos pero en sentido inverso, o sea, la propiedad dice:

$\log_a (b \,.\, c) = \log_a b + \log_a c$ siempre que **b** y **c** sean positivos. Esto también indica que si **b** y **c** son positivos:
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \,.\, c)$
Si lo aplicamos en esta ecuación, queda:

$$\log_2 x + \log_2 (x - 1) = \log_2 20 \;\Rightarrow\; \log_2 [x(x - 1)] = \log_2 20$$

Como la función $y = \log_2 x$ es inyectiva, tenemos:

$$x(x - 1) = 20 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 20 = 0$$

Sus soluciones son:

$$x = 5 \qquad \text{ó} \qquad x = -4$$

Pero en este caso tanto **x** como $x - 1$ deben ser positivos; por lo tanto, la única solución posible es:

$$x = 5$$

Para resolver la ecuación planteada en e.

$$\log_2 x = x - 1{,}5 \;\Rightarrow\; 2^{x - 1{,}5} = x$$

No es efectiva ninguna de las técnicas anteriores, ya que la incógnita aparece tanto en la base como en el exponente. Aquí es necesario ir aproximando después de analizar la situación gráficamente. Veamos el gráfico de las funciones:

$f(x) = \log_2 x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x - 1{,}5$

pues estamos buscando en qué puntos estos gráficos se cruzan.

En el gráfico podemos ver que hay dos valores de **x** en los cuales estas curvas se cruzan: un valor está entre 0 y 1 y el otro, cerca de 3.

f. $\log_3 [(4x - 1)(x - 1)] = 1$

g. $\log_4 (2x - 3) + \log_4 (5 - x) = 2$

h. $\log_3 (x - 5) - \log_3 (2x + 3) = -1$

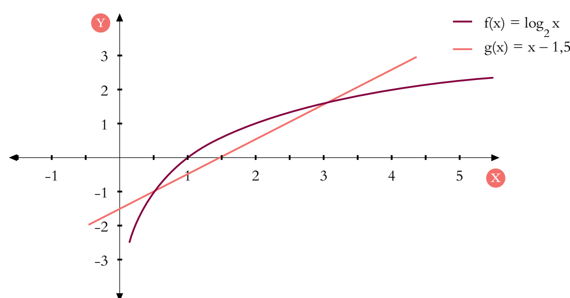
i. $\log_{\frac{1}{3}} 27^{432} = x$

j. $x = \log_2 \left(\frac{1}{8} \right)^{-387}$

23. Encuentren, con error menor que 0,01, las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $\log(x-1) = x-3$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 - x^2$



Utilicemos una tabla para analizar los valores de f(x), g(x) y f(x) – g(x), entre 0 y 1.

x	$\log_2 x$	$x - 1{,}5$	$\log_2 x - x + 1{,}5$
0,4	–1,32192809	–1,1	–0,22192809
0,5	–1	–1	0
0,6	–0,73696559	–0,9	0,16303441

Donde la diferencia es 0, ambas funciones valen igual; en este caso, esto pasa para x = 0,5; por lo tanto x = 0,5 es solución.

Para la otra solución analizaremos entre 2,5 y 3,5. Entre los valores de **x** donde la diferencia cambie de signo, por el corolario del Teorema de Bolzano, tendremos una solución

x	$\log_2 x$	$x - 1{,}5$	$\log_2 x - x + 1{,}5$
3	1,5849625	1,5	0,0849625
3,1	1,63226822	1,6	0,03226822
3,2	1,67807191	1,7	–0,02192809
3,3	1,72246602	1,8	–0,07753398

El valor buscado está entre 3,1 y 3,2; podríamos tomar como aproximado a 3,15 y así cometeríamos un error máximo de 0,1.

Para mejorar este error tendríamos que hacer lo mismo entre 3,1 y 3,2. Parte de esa tabla es:

x	$\log_2 x$	$x - 1{,}5$	$\log_2 x - x + 1{,}5$
3,14	1,65076456	1,64	0,01076456
3,15	1,65535183	1,65	0,00535183
3,16	1,65992456	1,66	$-7{,}5442.10^{-5}$

que nos muestra que el valor está entre 3,15 y 3,16.

Si tomamos como solución 3,16, el error que estamos cometiendo es de, a lo sumo, 0,01. Podríamos continuar hasta tener el error deseado. Por lo tanto, las soluciones de nuestra ecuación son:

x = 0,5 ó x = 3,16 (con error menor que 0,01)

1. Decidan cuál o cuáles de las siguientes expresiones son iguales a: $\frac{6^8 \cdot 77^{10} \cdot 147}{33^8 \cdot 121 \cdot 7^{12}}$

a. $\frac{7 \cdot 11}{3}$ **b.** $128 \cdot 6$ **c.** $2^8 \cdot 3$ **d.** 2^8 **e.** $11^{10} \cdot 21^{12}$

2. Hallen, si existe, la función exponencial que pase por los puntos:

a. (3; 5,25) y (4; 8,23)

b. (–2; 0,12) , (3; 345) y (2; 75)

c. (2,3; 5), (3,4; 2) y (6,1; 7)

d. (0; –231) y (–3; –17)

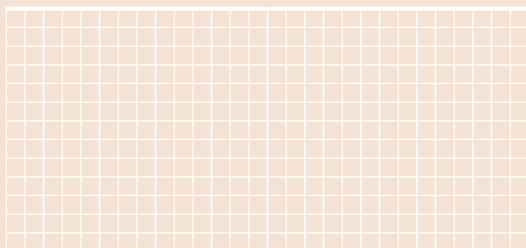
3. Para las funciones exponenciales $f(x) = k \cdot a^x$

a. ¿Cuál es el dominio y la imagen?
b. Analicen crecimiento y decrecimiento, ceros, positividad y negatividad.

ALUMNO CURSO FECHA

4. Grafiquen las siguientes funciones. Analicen: dominio, imagen, ceros, positividad, negatividad y asíntotas.

a. $f(x) = 2 \cdot (\frac{1}{3})^x$ **b.** $g(x) = -3 \cdot (\frac{1}{2})^x$ **c.** $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3^x$ **d.** $y = 3^{x-1}$ **e.** $y = 3^x - 1$



5. a. Encuentren, si existe, una función exponencial decreciente cuya imagen sea $\mathbb{R}^+$.

b. Hallen, si existe, una función exponencial creciente cuya imagen sea $\mathbb{R}^-$.

c. Encuentren, si existe, una función exponencial decreciente cuya imagen sea $\mathbb{R}^-$.

6. Para la función $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$, determinen:
a. Dominio e imagen.
b. Ceros, y conjuntos de positividad y negatividad.
c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7. Para la función $f(x) = \log_a x$ con $0 < a < 1$, determinen:
a. Dominio e imagen.
b. Ceros, y conjuntos de positividad y negatividad.
c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

8. a. ¿Qué número es mayor: $\log_{0,2} 2$ ó $\log_{0,2} 6$?

b. ¿Qué número es mayor: $\log_5 4$ ó $\log_5 6$?

ALUMNO CURSO FECHA

9. Calculen para los números positivos **x** e **y** cualesquiera:

$2 \log_x (x \sqrt{y}) + 4 \log_x \sqrt[4]{x^2 y} - 6 \log_x \sqrt[3]{y}$

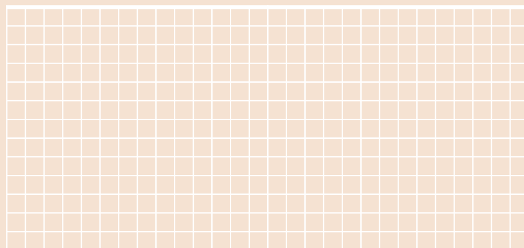
10. Sabiendo que $\log_b a = c$ calculen, en función de **c**:

$\log_b \left(\frac{a^{-6} . a^4 . \sqrt[6]{a^5}}{a^{-5}} \right)$

11. Grafiquen las siguientes funciones. Analicen: dominio, imagen, ceros, positividad y negatividad.

a. $y = \log_2 (x - 2)$ **b.** $y = \log_2 x - 2$ **c.** $y = \log_{\frac{1}{2}} (2x)$

d. $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ **e.** $y = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$



12. Una población de bacterias aumenta cada hora un porcentaje respecto de su población presente. Considerando como población inicial 1000 g de bacterias, si a las 3 horas hay 3375 g de bacterias, ¿cuál es la tasa de crecimiento por hora?

13. Una sustancia radiactiva pierde el 0,3% de su masa cada 10 días, y 3 meses después de comenzada la observación tiene una masa de 6 kg.

a. Hallen la función que determina la masa en función del tiempo (en días).

b. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por día, mes, semana y minuto?

c. ¿Después de cuánto tiempo la masa será de 950 g?

14. De una población de bacterias se tienen los siguientes datos: a los 8 días de comenzada la observación, la masa era de 950 g, y 43 días después la masa era de 1 kg.

a. ¿Cuál es la función que permite calcular la masa de la población en función del tiempo?

b. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento por día, hora, semana y mes?

c. ¿Cada cuánto tiempo se duplica la masa?

15. De una sustancia radiactiva se tienen los siguientes datos: a los 20 días de comenzada la observación, su masa era de 3 kg, y 10 días y medio después la masa era de 1250 g.

a. Hallen la función que permite calcular la masa remanente en función del tiempo.

b. ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?

c. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por día, semana, hora y mes?

16. Se deposita cierto dinero a plazo fijo en un banco que ofrece el 6,7% trimestral, y después de un año de depositado el dinero, se tienen $1555,4.

a. ¿Cuál es el capital inicial?

b. ¿Cuál es la expresión que permite determinar el monto (en $) en función del tiempo (en meses)?

c. ¿Cuál será el monto 3 años después?

d. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento por mes? ¿Y por semestre? ¿Y por semana?

e. ¿A partir de cuántos meses el monto será mayor que $5000?

17. De cierta sustancia radiactiva se tienen los siguientes datos: a los 3,5 años de comenzada una investigación la masa era de 23 kg, 6 años después es de 20 kg.

a. ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?

b. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por año, por década y por mes?

18. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 1 año y medio, y se sabe que 4 meses después de comenzada la observación había 3 kg de dicha sustancia.

a. Hallen la función que determina la masa remanente en función del tiempo.

b. ¿En qué momento la masa será de 250 g?

c. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por mes, año, década y semana?

19. De una población de bacterias se sabe que aumenta el 0,5% cada 8 horas; si se comienza la observación con 500 g de bacterias:

a. ¿Cuál es la expresión que permite determinar la masa de las bacterias en función del tiempo (en horas)?

b. ¿Cuánto tarda esta población de bacterias en triplicar su masa?

c. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento por día, mes y año?

20. Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a. $(2^{x-1})^{2-3x} \cdot 6^{x+1} \cdot 7 = 8^{3x} : 4$

b. $(16^{x-1})^{2-x} : 2 = 8^{2x} \cdot 4 \cdot 4^{x-2}$

c. $5^{2x-3} : 9^{x-3} : 5 = 3^{x-1} \cdot (2^{x})^{x-3} \cdot 3$

d. $3^{x} : 4^{x-2} \cdot 5^{2-x} = 4^{2x-1} \cdot 3^{-x} : 2^{-2x+2}$

e. $5^{x-1} . (2^x)^{1-x} : 3 = 3^{2-x} : 5^{1-2x} . 4$

f. $\log_4 [(2x - 3)(5 - x)] = 2$

g. $\log_4 (x^2 - x) = 2$

h. $\log_3 (4x - 1) + \log_3 (x - 1) = 1$

i. $\log_4 (3x - 5) = -1$

21. Hallen los valores de **x** que satisfacen las siguientes igualdades, con error menor que 0,1.

a. $3^x = x - 2$

b. $\log x = x - 2$

c. $\log x = x^2 - 4$

1. Una población de bacterias aumenta el 3,5% cada 10 horas. Después de 5 días de comenzada la observación, se tenían 200 g de bacterias.

a. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la masa de las bacterias en función del tiempo?

b. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento por hora, día y semana?

c. ¿Cada cuánto tiempo se duplica la masa de las bacterias?

d. ¿Después de cuánto tiempo de empezada la observación la masa es de 1 kg?

2. El Stroncio es una sustancia radiactiva cuya vida media es de 28,8 años. Pasados 6 meses de colocada cierta cantidad de esta sustancia en una cubeta, se observa que hay 1,5 kg.

a. ¿Cuál es la función que permite calcular la masa remanente?

b. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento por año, mes, década y siglo?

c. ¿Después de cuánto tiempo de comenzada la observación la masa será de 500 g?

3. Hallar los valores de **x** que verifican las siguientes igualdades:

a. $\log_3 (2x - 5) = 2$

b. $\log_{x-2} 9 = 2$

c. $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x-1}} = (81^{-x+3})^{x-2}$

d. $\dfrac{3^{-x+2}}{5^x} = 7^x . 3$

e. $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x + 2) = 2$

4. Colocar el símbolo de < , > o =

a. $\log_2 1$ ________ $\log_5 1$

b. $\log_{0,5} 2$ ________ $\log_{0,5} 4$

c. $\log_2 7$ ________ $\log_2 10$

d. $\log_5 8$ ________ $\log_7 8$

5. Encontrar una función exponencial decreciente cuya ordenada al origen sea –3.

4 Funciones y ecuaciones trigonométricas

La trigonometría estudia las relaciones que existen entre los lados de un triángulo y sus ángulos. Éstas pueden extenderse a cualquier ángulo aunque no forme parte de un triángulo. A partir de ellas, se definen las funciones trigonométricas. Las características de este tipo de funciones las convierte en un buen modelo para la descripción de fenómenos físicos que se propagan a través de ondas, como la luz y el sonido.



Recuerden representar los datos proporcionados en el problema a través de un esquema. De esta manera, podrán interpretarlos y relacionarlos mejor.

¿Sabían que...?
El teodolito es un instrumento utilizado tanto por los agrimensores como por los topógrafos. En la actualidad, hay artefactos que se conectan a computadoras, que realizan los cálculos trigonométricos e informan, además del ángulo, la distancia que se quiere medir.



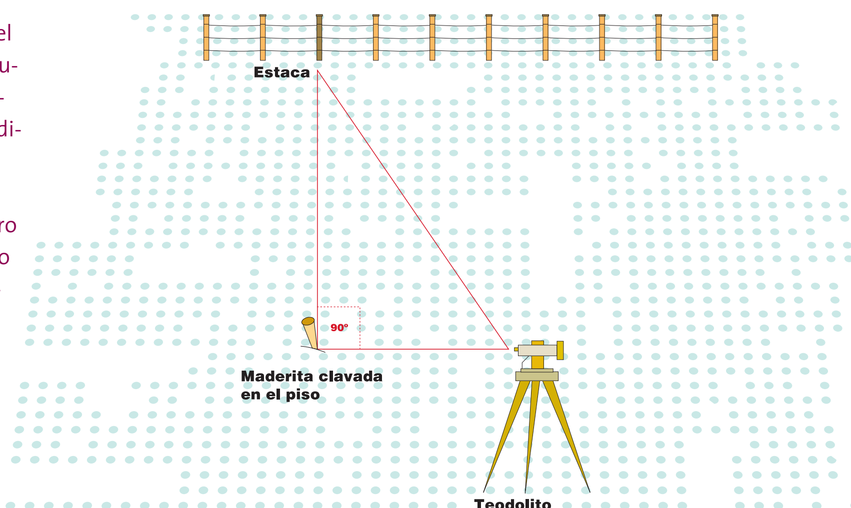
Un proyecto muy importante que se llevó a cabo en el siglo XIX, en la India británica, consistió en cubrir el país con muchas cadenas de triángulos, en las direcciones norte-sur y este-oeste, y tomar las mediciones con teodolitos muy grandes (cada uno con su caja pesaba media tonelada y se necesitaban doce hombres para moverlo). En 1852, uno de los encargados de realizar los cálculos trigonométricos (los hacían a mano) le comentó al director del proyecto que le parecía que habían descubierto la mayor montaña del mundo. Pudieron observarla desde seis estaciones diferentes, a una distancia de más de 160 km y confirmaron sus sospechas. En un primer momento se lo llamó Pico XV, pero en 1856 el inspector general del proyecto la denominó en memoria de su predecesor en la oficina: Sir George Everest.

Para comenzar...

Una de las tareas más importantes de los agrimensores consiste en determinar los límites exactos de terrenos. Toman en el lugar la información que precisan y después, en sus oficinas, hacen todos los dibujos y cálculos que consideran necesarios. Las distancias que tienen que medir son muy grandes, tanto en el campo como en la ciudad, por lo cual la cinta métrica no es una herramienta eficaz. El instrumento que resulta útil para tomar longitudes muy grandes es el teodolito. Este aparato se utiliza para medir ángulos entre objetos y ángulos de elevación. Veamos cómo se pueden calcular longitudes a partir de las amplitudes de los ángulos medidos.

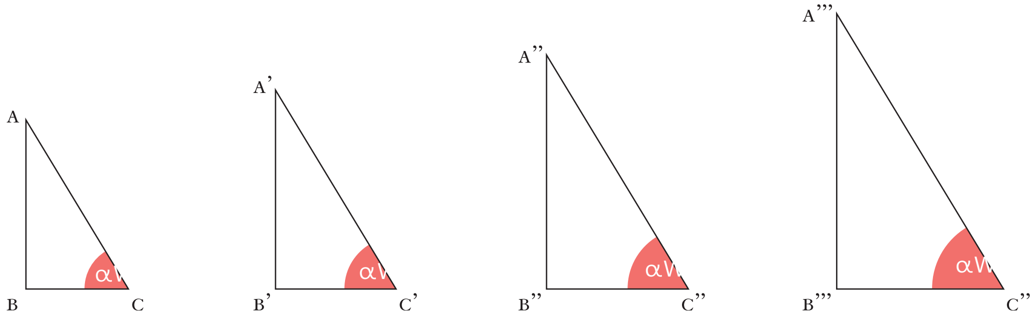
Problema 1

Se quiere medir el ancho de un campo. El agrimensor toma como referencia algún objeto identificable que esté en el límite opuesto del terreno; por ejemplo, una estaca del cerco. A continuación, hace una marca, con una madera, del lado donde está parado. Con el teodolito, mide un ángulo recto que tenga por lado a la recta que determinan los puntos de apoyo de la estaca y la madera. Después toma, sobre el otro lado del ángulo, otro punto de referencia, que sabe por mediciones anteriores que se encuentra a 300 metros del primero. Entonces, mide el ángulo que tiene por vértice este último punto y cuyos lados pasan por la estaca del cerco y la madera. Si este ángulo tiene una amplitud de 35º, expliquen cómo harían ustedes para calcular el ancho del terreno a partir de estos datos.



Razones trigonométricas

Consideremos diferentes triángulos rectángulos



Si todos ellos tienen un ángulo agudo respectivamente congruente, entonces tienen los tres ángulos congruentes; por lo tanto, son semejantes.
Luego, sus lados son respectivamente proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{A'''B'''}}{\overline{B'''C'''}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}} = \frac{\overline{A'''B'''}}{\overline{A'''C'''}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{A''C''}} = \frac{\overline{B'''C'''}}{\overline{A'''C'''}}$$

En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo, con ángulo α, se verifican las igualdades anteriores. Por este motivo, se les dio un nombre particular a cada una de ellas:

Llamamos:

seno de $\hat{\alpha}$ = sen $\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

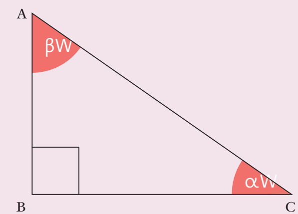
coseno de $\hat{\alpha}$ = cos $\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

tangente de $\hat{\alpha}$ = tg $\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Como $\overline{AB}$ es el cateto opuesto al ángulo α, $\overline{BC}$ es el cateto adyacente y $\overline{AC}$ es su hipotenusa, en general se define:

Algo más...

Dado un triángulo rectángulo ABC



hemos definido las relaciones trigonométricas correspondientes al ángulo α. Si establecemos las relaciones que corresponden a $\hat{\beta}$:

sen $\hat{\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ cos $\hat{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ tg $\hat{\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

Vemos que:

sen $\hat{\alpha}$ = cos $\hat{\beta}$

cos $\hat{\alpha}$ = sen $\hat{\beta}$

tg $\hat{\alpha} = \frac{1}{\text{tg } \hat{\beta}}$

Como $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ - \beta$,
por lo tanto:

sen $\hat{\alpha}$ = cos $(90^\circ - \hat{\alpha})$

cos $\hat{\alpha}$ = sen $(90^\circ - \hat{\alpha})$

tg $\hat{\alpha} = \frac{1}{\text{tg } (90^\circ - \hat{\alpha})}$

¿Algo más...?



La calculadora científica nos da automáticamente los valores de las razones trigonométricas. Para ello, en primer lugar, tenemos que verificar que esté tomando los valores de los ángulos en el sistema sexagesimal: en el visor debe decir sobre el borde **DEG** o **D** (según la calculadora).

En algunas calculadoras, se debe escribir en primer lugar el valor del ángulo y luego, presionar la tecla sin, cos, tan, según se desee averiguar el seno, coseno o tangente, respectivamente. En otras, se debe apretar primero la tecla vinculada a la razón que se quiere averiguar y luego, la amplitud del ángulo.

Si se trata de un ángulo cuya amplitud incluye grados, minutos y segundos, muchas calculadoras tienen una tecla



que nos permite introducir este tipo de amplitudes. Por ejemplo, para un ángulo de 36º 25' 37" se debe introducir 36, apretar la tecla anterior, 25, volver a presionar la misma tecla y repetir la operación después del 37.
De esta manera, queda en el visor 36,426666, que es la forma decimal de la amplitud del ángulo. Si se aprieta SHIFT 2nd o INV (según la calculadora) y la tecla anterior, aparecerá en el visor 36º 25º 37º que significa 37º 25' 37".

Sea α un ángulo agudo de un triángulo rectángulo:

$$\text{seno de } \hat{\alpha} = \text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno de } \hat{\alpha} = \cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \hat{\alpha} = \text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

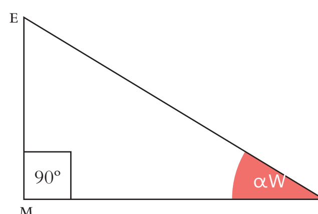
$$\text{cosecante de } \hat{\alpha} = \text{cosec } \hat{\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{secante de } \hat{\alpha} = \sec \hat{\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{cotangente de } \hat{\alpha} = \text{cotg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Problema 1

Volvamos a los agrimensores que tienen que calcular el ancho del terreno (pág. 82).
Hagamos una figura de análisis que nos permita interpretar mejor esta situación.
Llamemos E al punto de apoyo de la estaca del cerco, M al de la madera, y P al último punto de apoyo del teodolito:



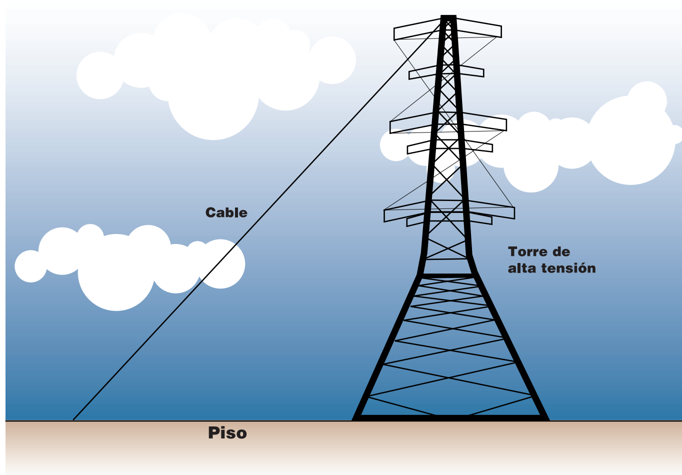
Como sabemos que $\overline{MP}$ mide 300 m, y el ángulo α tiene una amplitud de 35º, podemos hallar la longitud de $\overline{EM}$ utilizando la tangente de $\hat{\alpha}$:

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\overline{EM}}{\overline{PM}} \Rightarrow \text{tg } 35º = \frac{\overline{EM}}{300} \Rightarrow \overline{EM} \approx 0{,}700020 \ . \ 300 \approx 210 \text{ m}$$

Entonces, el terreno mide, aproximadamente, 210 m de ancho.

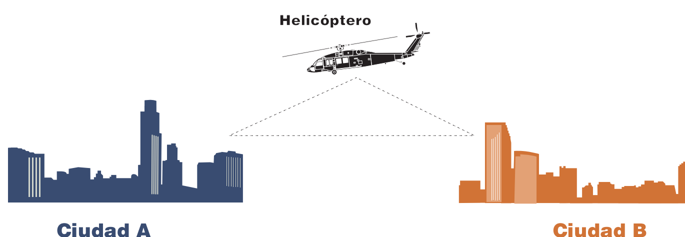
Problema 2

Una torre de alta tensión está sujeta al piso, con un cable que tiene un extremo fijo al suelo, como se ve en el dibujo. Se sabe que la longitud del cable es de 13 m y que el ángulo que forma éste con la horizontal es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿A qué distancia del pie de la misma está sujeto el cable?



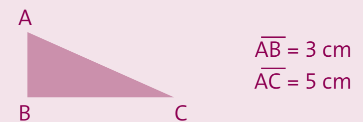
Problema 3

Un helicóptero viaja de una ciudad hacia otra, distantes entre sí 40 km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero, hacia las ciudades con la horizontal son de 14° y 26°, respectivamente. ¿A qué altura está el helicóptero? ¿Qué distancia hay en este momento entre el helicóptero y cada una de las ciudades?



Algo más...

Si en un triángulo rectángulo conocemos la longitud de dos de sus lados, podemos calcular la amplitud de sus ángulos.
Por ejemplo, si sabemos que en el triángulo rectángulo ABC:



$\overline{AB} = 3$ cm
$\overline{AC} = 5$ cm

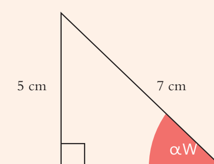
tenemos varias formas de hallar el ángulo A:

$\cos \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$

En la calculadora podemos hallar $\hat{A}$ de la siguiente manera: introducimos el número $\frac{3}{5}$, apretamos SHIFT, 2nd o INV (según la calculadora) y COS.

Obtenemos el valor del ángulo cuyo coseno es $\frac{3}{5}$, o sea, 53,13º. Si seguimos los pasos indicados en el lateral de la página anterior, podemos decir que el ángulo A mide 53º 7’ 48’’.

1. Calculen la amplitud de $\hat{\alpha}$:



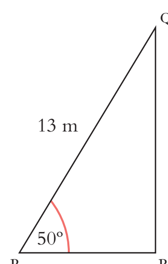
2. Desde lo alto de un faro, el cuidador observa un barco que se detuvo en altamar. El ángulo que forma la visual hacia el barco con el horizonte es de 2º. Si el faro tiene 50 m de alto, ¿a qué distancia se encuentra el barco?

3. Tenemos el triángulo ABC, rectángulo en A, donde $\overline{AB} = 2 . \overline{AC}$. Calculen la amplitud de los ángulos interiores de la figura.

4. Un gato está parado en el extremo más alto de un árbol, a 5 m del suelo. De pronto ve, con un ángulo de 15º respecto de la vertical, a un ratoncito comiendo queso. ¿A qué distancia de la base del árbol se encuentra el ratoncito?

Problema 2

Para interpretar mejor el problema, coloquemos los datos que se dan en el enunciado en un esquema. Llamemos P al punto en el cual el cable está fijo al piso, Q al extremo superior de la torre y R al pie de ésta:



Tenemos que calcular las longitudes de los catetos de este triángulo rectángulo. Como conocemos la longitud de la hipotenusa, podemos utilizar el seno y el coseno del ángulo de 50°.

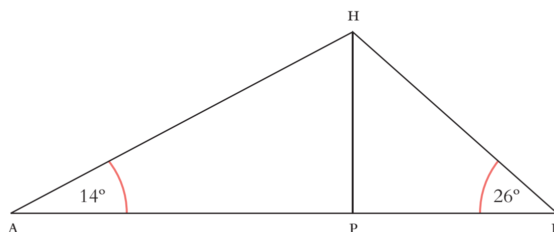
$$\text{sen } 50º = \frac{\overline{QR}}{13} \Rightarrow \overline{QR} = \text{sen } 50º . 13 \approx 9{,}96$$

$$\cos 50º = \frac{\overline{PR}}{13} \Rightarrow \overline{PR} = \cos 50º . 13 \approx 8{,}36$$

Por lo tanto, la torre mide aproximadamente 9,96 m y el cable está fijo a 8,36 m del pie de la misma.

Problema 3

En este caso, tenemos un triángulo que no es rectángulo. ¿Cómo hacemos entonces para poder relacionar el lado que conocemos con los ángulos?
Veámoslo en un esquema, donde trazamos la altura correspondiente al segmento que determinan las dos ciudades.
Llamemos H al punto que representa al helicóptero, A y B a los puntos que representan a las dos ciudades, y P al pie de la altura correspondiente al lado AB:



La altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos porque corta al lado correspondiente en forma perpendicular.

En el $\overset{\Delta}{APH}$, rectángulo en $\hat{P}$: $tg\ 14º = \frac{\overline{HP}}{\overline{AP}}$ (1)

En el $\overset{\Delta}{BPH}$, rectángulo en $\hat{P}$: $tg\ 26º = \frac{\overline{HP}}{\overline{AP}}$ (2)

Como sabemos que las distancias entre las ciudades es de 40 km, $\overline{AP} + \overline{BP} = 40 \quad \Rightarrow \overline{AP} = 40 - \overline{BP}$ (3)

Si despejamos en (1) $\overline{HP} = tg\ 14º \,.\, \overline{AP}$ (4)
y en (2) $\overline{HP} = tg\ 26º \,.\, \overline{BP}$ (5)

Reemplazamos (3) en (4) y obtenemos:

$\overline{HP} = tg\ 14º \,.\, (40 - \overline{BP})$ (6)

Si igualamos (5) y (6)

$tg\ 26º \,.\, \overline{BP} = tg\ 14º \,.\, (40 - \overline{BP})$

Aplicamos la propiedad distributiva y despejamos

$0{,}44773 \,.\, \overline{BP} = 0{,}24932 \,.\, (40 - \overline{BP})$

$\overline{BP} = \frac{10}{0{,}74} \approx 13{,}5km$

Por lo tanto, $\overline{HP} = 6{,}6$ km aproximadamente.

Una vez que calculamos la altura, podemos calcular la distancia del helicóptero a cada una de las ciudades, aplicando el Teorema de Pitágoras.

$\overline{HB} = \sqrt{6{,}6^2 + 13{,}5^2} = 15{,}03\ km^2$
$\overline{HA} = \sqrt{6{,}6^2 + 26{,}5^2} = 27{,}3\ km$

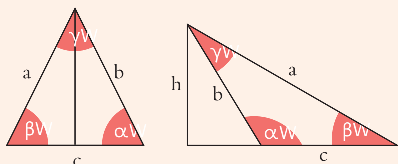
Es decir que la distancia del helicóptero a la ciudad B es de 15,03 km y a la A, de 27,3 km, aproximadamente.



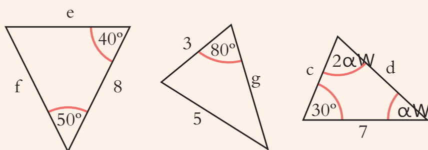
¿Sabían que...?
Algunos historiadores sostienen que el inventor de la trigonometría fue Hiparco de Rhodas, matemático y astrónomo griego que vivió entre los años 190 a. C. y 120 a. C. Hiparco construyó una tabla de cuerdas cuyo propósito era proporcionar un método para resolver triángulos. También introdujo en Grecia la división de un círculo en 360º. Lamentablemente, la mayoría de sus trabajos se han perdido.

El primer trabajo en el que aparece el seno de un ángulo de manera similar a la actual es el de Aryabhata, matemático hindú, quien nació en el año 476 y falleció en el 550. De los textos que escribió, sólo uno llegó hasta nuestros días, *Aryabhatiya*, que es un tratado de Astronomía y Matemática. En la sección dedicada a esta última ciencia, se incluyen temas de aritmética, álgebra, y trigonometría plana y esférica. Propone una buena aproximación de π (3,1416), la mejor de su época.

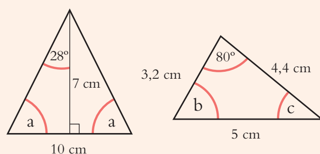
5. Para demostrar el teorema del seno, consideramos sólo triángulos acutángulos. ¿Qué sucede con los triángulos obtusángulos? Las relaciones que se establecieron ¿son válidas para ambos casos? ¿Por qué?



6. Calculen la longitud de los lados señalados con letras en los siguientes esquemas:



7. Calculen la amplitud de los ángulos señalados con letras:

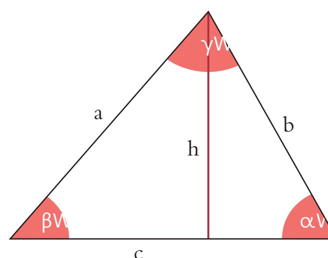


Teorema del seno

Vimos que es posible calcular los lados de un triángulo cualquiera conociendo sus ángulos. Hallamos la altura del triángulo y la distancia del pie de ésta a cada vértice (a través de un sistema de ecuaciones), y con estos datos aplicamos el Teorema de Pitágoras.

Generalicemos estos procedimientos.

Dado un triángulo cualquiera, queremos buscar una relación entre sus lados y sus ángulos. Realicemos un esquema, trazando una altura **h**, correspondiente al lado **c**:



Esta altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos, por lo tanto:

$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = \text{sen } \hat{\alpha} \, . \, b$ (1)

$\text{sen } \hat{\beta} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \text{sen } \hat{\beta} \, . \, a$ (2)

De (1) y (2) obtenemos: $b \, . \, \text{sen } \hat{\alpha} = a \, . \, \text{sen } \hat{\beta}$

Si dividimos ambos miembros por a . b

$$\frac{\text{sen } \hat{\alpha}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{\beta}}{b}$$

Si trazamos la altura correspondiente al lado **b**, análogamente obtenemos que:

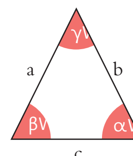
$$\frac{\text{sen } \hat{\gamma}}{c} = \frac{\text{sen } \hat{\beta}}{b}$$

Entonces, hemos demostrado que:

Conclusión

Dado un triángulo cualquiera con ángulos α, β, γ y lados a, b, c, respectivamente opuestos a dichos ángulos, se verifica que:

$$\frac{\text{sen } \hat{\alpha}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{\beta}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{\gamma}}{c}$$

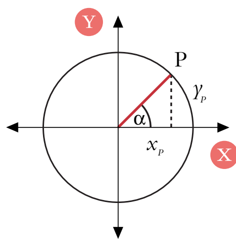


Dijimos que este teorema nos permite relacionar los lados de un triángulo cualquiera con sus ángulos, pero sólo consideramos a los triángulos acutángulos. Además, sólo definimos las razones trigonométricas para ángulos agudos. Pero ¿qué significa el seno de un ángulo obtuso?

Generalización de las definiciones de las relaciones trigonométricas

Hasta ahora trabajamos siempre con ángulos agudos. Extenderemos la definición de las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo.

Consideremos un par de ejes cartesianos y una circunferencia con centro en el origen de coordenadas.
Si trazamos un ángulo α con un lado sobre el eje positivo **x**, éste determina un punto P = $(x_P ; y_P)$ en la circunferencia y un triángulo rectángulo.
Dado que el mismo triángulo con ángulo α tomado en cualquier otra circunferencia sería semejante, nos resulta más conveniente para simplificar los cálculos trabajar con un triángulo cuya hipotenusa mida 1. A esta circunferencia, cuyo radio es 1, se la llama circunferencia trigonométrica.
Como la hipotenusa es 1:

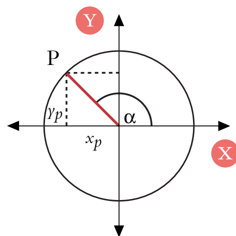


$\text{sen } \hat{\alpha} = y_P$

$\cos \hat{\alpha} = x_P$

$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{y_P}{x_P}$

De la misma manera se definen el seno, el coseno y la tangente para los ángulos de cualquier cuadrante.

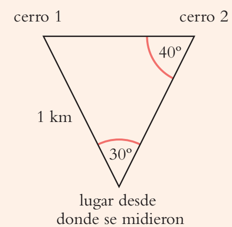


$\text{sen } \hat{\alpha} = y_P$

$\cos \hat{\alpha} = x_P$

$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{y_P}{x_P}$

8. Para determinar la distancia entre dos cerros, se tienen los datos que se muestran en el esquema.



¿Cuál es la distancia entre estos cerros?

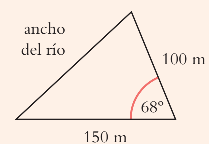
____

____

____

____

9. Se necesita construir un túnel para cruzar un río. El ingeniero, parado en una de las orillas, toma las siguientes medidas:



¿Qué longitud deberá tener este túnel?

____

____

____

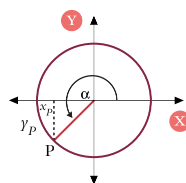
____

10. Se sabe que $\hat{\alpha}$ está en el primer cuadrante. Indiquen cuál de los siguientes pares de números pueden corresponder al coseno y la tangente de $\hat{\alpha}$. Justifiquen sus respuestas.

a. $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$ **b.** $\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$ **c.** $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$

11. Se sabe que sen $\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y tg $\hat{\alpha} = -1$. ¿En qué cuadrante puede estar $\hat{\alpha}$?

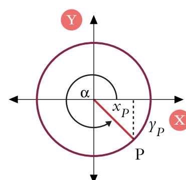
12. Se sabe que cos $\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y tg $\hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ¿En qué cuadrante puede estar $\hat{\alpha}$?



sen $\hat{\alpha} = y_P$

cos $\hat{\alpha} = x_P$

tg $\hat{\alpha} = \frac{y_P}{x_P}$

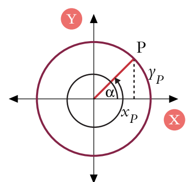


sen $\hat{\alpha} = y_P$

cos $\hat{\alpha} = x_P$

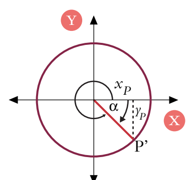
tg $\hat{\alpha} = \frac{y_P}{x_P}$

Si α es un ángulo mayor que 360º, entonces en la circunferencia dará más de un giro y llegará a un punto correspondiente a un ángulo de alguno de los cuatro cuadrantes; por lo tanto, los valores de las relaciones trigonométricas se repetirán.



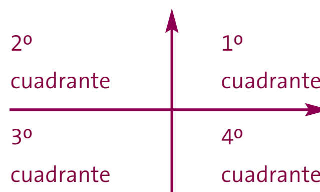
sen (360º + $\hat{\alpha}$) = sen $\hat{\alpha}$
cos (360º + $\hat{\alpha}$) = cos $\hat{\alpha}$
tg (360º + $\hat{\alpha}$) = tg $\hat{\alpha}$

Si el ángulo es negativo, las relaciones se definen igual.



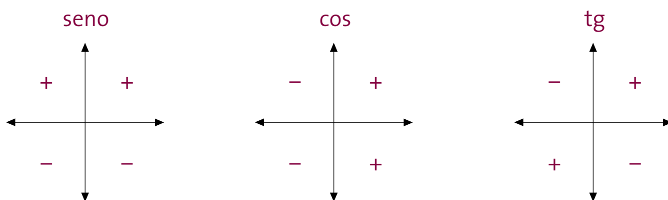
sen (– $\hat{\alpha}$) = – sen $\hat{\alpha}$
cos (– $\hat{\alpha}$) = cos $\hat{\alpha}$
tg (– $\hat{\alpha}$) = – tg $\hat{\alpha}$

Para que nos resulte más sencillo, identificaremos a los cuatro cuadrantes de la siguiente manera.



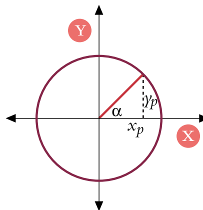
De acuerdo con el signo de las coordenadas de cada punto, podemos ver que:
En el primer cuadrante, como las coordenadas **x** e **y** de los puntos son positivas, entonces todas las razones trigonométricas son positivas. En el tercer cuadrante, ambas coordenadas son negativas; por lo tanto, el seno y el coseno de los ángulos de este cuadrante también lo son y la tangente es positiva.

En el segundo cuadrante, las ordenadas son positivas y las abscisas, negativas; entonces, el seno es positivo, y el coseno y la tangente, negativos. En el cuarto, como las ordenadas son negativas y las abscisas son positivas, el seno y la tangente son negativos y el coseno, positivo.



En cualquiera de los triángulos anteriores podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$1^2 = x_p{}^2 + y_p{}^2 = (\text{sen}\ \hat{\alpha})^2 + (\cos\ \hat{\alpha})^2 =$
$= \text{sen}^2\ \hat{\alpha} + \cos^2\ \hat{\alpha}$



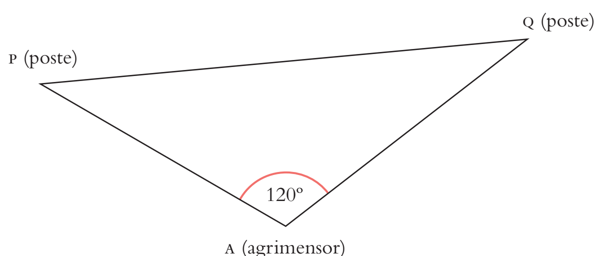
Conclusión:
Relación pitagórica
$\mathbf{sen^2\ \hat{\alpha} + cos^2\ \hat{\alpha} = 1}$

Problema 4

Un agrimensor está haciendo mediciones con un teodolito. Tomó como referencia dos postes que marcan los vértices de un terreno, que están a 5 km y 8 km, respectivamente, del lugar donde él está parado. El ángulo determinado por las visuales a dichos postes es de 120º.
¿Cuál es la distancia entre los postes?

Problema 4

Para interpretar mejor los datos del problema, hagamos un esquema:



13. Demuestren que:

a. $\text{tg}\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{sen}\ \hat{\alpha}}{\cos\ \hat{\alpha}}$ $(\cos\ \hat{\alpha} \neq 0)$

b. $\sec\ \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\cos\ \hat{\alpha}}$ $(\cos\ \hat{\alpha} \neq 0)$

c. $\text{cosec}\ \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\ \hat{\alpha}}$ $(\text{sen}\ \hat{\alpha} \neq 0)$

d. $\text{cotg}\ \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\text{tg}\ \hat{\alpha}}$ $(\cos\ \hat{\alpha} \neq 0, \text{tg}\ \hat{\alpha} \neq 0)$

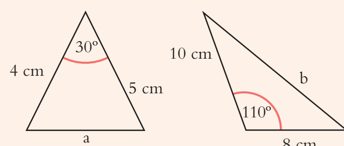
e. $1 + \text{tg}^2\ \hat{\alpha} = \sec^2\ \hat{\alpha}$ $(\cos\ \hat{\alpha} \neq 0)$

¿Cómo se lee...?

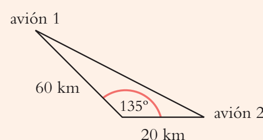
$\text{sen}^2\ \hat{\alpha} = (\text{sen}\ \hat{\alpha})^2$ = seno al cuadrado de $\hat{\alpha}$

$\cos^2\ \hat{\alpha} = (\cos\ \hat{\alpha})^2$ = coseno al cuadrado de $\hat{\alpha}$

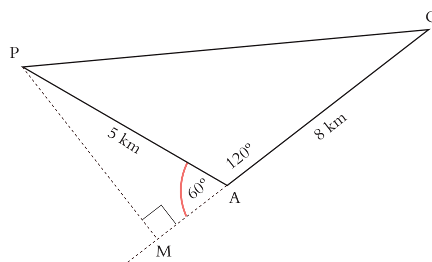
14. Hallen la longitud de los lados señalados con letras:



15. Observen los datos que señala un radar sobre la posición de dos aviones respecto de la torre de control. ¿A qué distancia están estos aviones entre sí?



Sabemos que $\overline{AP} = 5$ km y que $\overline{AQ} = 8$ km. Si trazamos la altura, $\overline{PM}$, correspondiente al lado $\overline{AQ}$:



En el triángulo MAP calculamos:

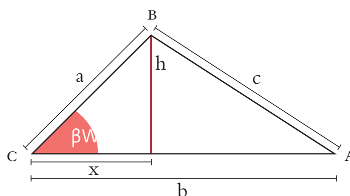
$$\text{sen } 60º = \frac{\overline{MP}}{5} \approx 0,86603 \Rightarrow \overline{MP} \approx 5 \,.\, 0,86603 \approx 4,33$$

$$\cos 60º = \frac{\overline{MA}}{5} = 0,5 \Rightarrow \overline{MA} = 5 \,.\, 0,5 = 2,5$$

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo PMQ, donde $\overline{MQ} = \overline{MA} + \overline{AQ} = 2,5 + 8 = 10,5$:
$\overline{PQ}^2 = 10,5^2 + 4,33^2 = 129 \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{129} \approx 11,36$.
Por lo tanto, la distancia entre los postes es de 11,36 km, aproximadamente.

Teorema del coseno

En este caso, teníamos dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ambos, y pudimos hallar el lado faltante. Generalicemos esta situación:
Consideremos un triángulo cualquiera ABC



$\text{sen } \hat{\beta} = \dfrac{h}{a}$ $\quad \cos \hat{\beta} = \dfrac{x}{a}$

$h = \text{sen } \hat{\beta} \,.\, a$ (1)

$x = \cos \hat{\beta} \,.\, a$ (2)

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la derecha:

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

Reemplazamos (1) y (2)

$$c^2 = (\text{sen } \hat{\beta} \,.\, a)^2 + (b - \cos \hat{\beta} \,.\, a)^2$$

$$c^2 = \text{sen}^2 \hat{\beta} \,.\, a^2 + b^2 - 2 \cos \hat{\beta} \,.\, a \,.\, b + \cos^2 \beta \,.\, a^2$$

Sacamos factor común

$$c^2 = a^2 \underbrace{(\text{sen}^2 \hat{\beta} \,.+\, \cos^2 \hat{\beta})}_{1} + b^2 - 2 \cos \hat{\beta} \,.\, a \,.\, b$$

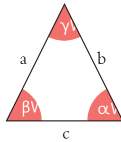
Conclusión

Dado un triángulo cualquiera con ángulos α, β, γ y lados a, b, c, respectivamente opuestos a dichos ángulos, se verifica que:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \hat{\gamma} \,.\, a \,.\, b$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cos \hat{\alpha} \,.\, c \,.\, b$

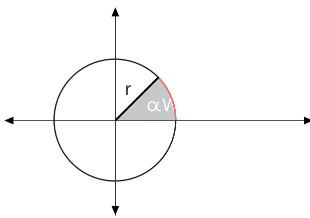
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cos \hat{\beta} \,.\, a \,.\, c$



Otro sistema de medición de ángulos: sistema circular

Cuando se trabaja con medidas de longitud, no resulta práctico utilizar el sistema sexagesimal para medir los ángulos; por este motivo, se buscó una forma de medirlos que sea decimal.

Si representamos en una circunferencia un ángulo α cualquiera, observamos que le corresponde un único arco. Por este motivo, en lugar de mencionar la amplitud del ángulo, podemos hacer referencia a la medida del arco, que es una longitud.



Un **radián** es el cociente entre la longitud del arco y el radio de la circunferencia que lo incluye.

Entonces, si consideramos una circunferencia de radio r:

$$1 \text{ radián} = \dfrac{\dfrac{2\,.\pi\,.\cancel{r}\,\alpha}{360^o}}{\cancel{r}}$$

Como este número no depende del radio, podemos tomar cualquier circunferencia. Trabajaremos, entonces, con la de radio 1. El ángulo de toda la circunferencia es de 360º y el arco correspondiente será su perímetro, que es 2π . 1 = 2π; entonces, como un ángulo de 360º tiene un arco de 2π, decimos que 360º equivale a 2π radianes.

Análogamente, el arco de media circunferencia es la mitad del perímetro, es decir, π y su ángulo de 180º. Entonces, 180º equivale a π radianes.

Basta recordar estas relaciones para pasar de un sistema de medición de ángulos al otro.

Algo más...



Para trabajar con la calculadora con ángulos medidos en radianes, tenemos que verificar que esté tomando los valores de los ángulos en este sistema: en el visor debe decir sobre el borde **RAD** o **R**.

Las demás operaciones para el cálculo de las razones trigonométricas son iguales que cuando se trabaja en el sistema sexagesimal.
(Ver pág. 84).

Cuando trabajen con la calculadora, no confíen ciegamente en los resultados que ella les proporciona. Estimen previamente los resultados o busquen algún mecanismo para controlar que los valores que obtienen son razonables. Muchas veces sucede que apretamos mal alguna tecla y los números que nos quedan son absurdos.

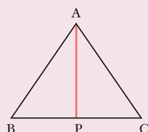
Piensen, sin hacer las cuentas:

- ¿Cuántas cifras tendrán:
  12000000 . 590000 ____________
  1775641050 : 125487 ____________?
- ¿Cuántas cifras decimales tendrán:
  12,3456 . 15,3424 ____________
  34,6789 : 0,5 ____________?

16. Completen la siguiente tabla, que relaciona amplitudes expresadas en grados sexagesimales y en radianes.

Grados	45	100	−130			
Radianes				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	−1,5

Algo más...
Veamos algunos valores de las funciones trigonométricas que nos serán útiles. Calculemos los valores del seno y el coseno para los ángulos de 30º y 60º.
Consideremos un triángulo equilátero cualquiera:



Sus ángulos interiores miden 60º.
Si trazamos la altura, $\overline{AP}$, correspondiente al lado $\overline{BC}$, ésta es bisectriz del ángulo BAC; por lo tanto, $B\hat{A}P = 30º$.
Como $\overline{AP}$ también es mediatriz de $\overline{BC}$,

$\overline{BP} = \overline{PC} = \frac{\overline{AC}}{2}$

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en

$\overset{\triangle}{APC}$: $\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}^2}{4} = \overline{AP}^2 \Rightarrow 3\,\frac{\overline{AC}^2}{4} = \overline{AP}^2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{AC} = \overline{AP}$. Si consideramos $\overline{AC}$, radio de la circunferencia trigonométrica 1; entonces, sen 60º $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ y

cos 30º $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por otro lado, como

$\overline{PC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{1}{2}$, cos 60º $= \frac{1}{2}$ y sen 30º $= \frac{1}{2}$.

Algunos valores que nos será útil tener disponibles son:

$\hat{a}$	0	30º	45º	60º	90º
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen $\hat{a}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos $\hat{a}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Un ángulo de 45º, que es la cuarta parte de 360º, corresponde a $\frac{\pi}{4}$ radián.

Para averiguar la medida que corresponde en radianes a un ángulo de 60º, basta con utilizar la "regla de tres simple directa".

360º ________ 2π

60º ________ $\frac{2\pi \cdot 60}{360} = \frac{1}{3}\,\pi$

Problema 5

El voltaje, V (en volts), de un tomacorriente de una casa, en función del tiempo, **t** (en segundos), está dado por la siguiente fórmula:

$$V = 220 \cos (2\pi \cdot t)$$

a. Calculen cuál será el voltaje del enchufe a los 30 segundos.
b. ¿En qué momento el voltaje es de 110 volts?

Problema 5

Para responder a la primera pregunta, reemplazamos t = 30 en la fórmula y obtenemos:

$V = 220 \cos (2\pi \cdot 30) = 220 \cdot \cos (60 \cdot \pi) = 220$

En el caso de la segunda, queremos resolver la siguiente ecuación:

$$110 = 220 \cos (2\pi \cdot t) \Rightarrow 0{,}5 = \cos (2\pi \cdot t)$$

Es decir, tenemos que buscar un ángulo cuyo coseno sea 0,5.

Uno es $\frac{\pi}{3}$ y otro es $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3} \cdot \pi$. Por lo tanto:

$2\pi \cdot t = \frac{\pi}{3}$ ó $2\pi \cdot t = \frac{5}{3} \cdot \pi$

$\Rightarrow t = 0{,}17$ ó $t = 0{,}83$ segundos, aproximadamente.

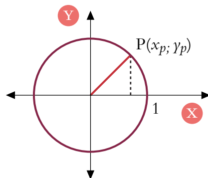
Pero también hay otros ángulos a los que les corresponde el mismo valor de coseno. A continuación, estudiaremos estas relaciones entre los ángulos y sus razones trigonométricas.

Funciones trigonométricas

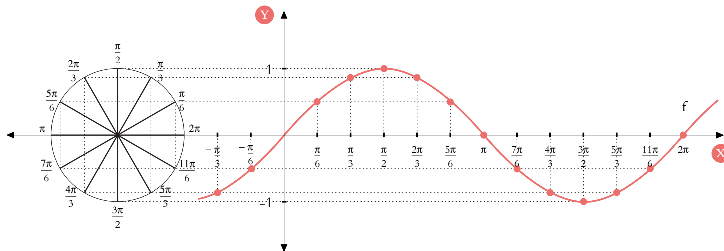
Consideremos las siguientes funciones:

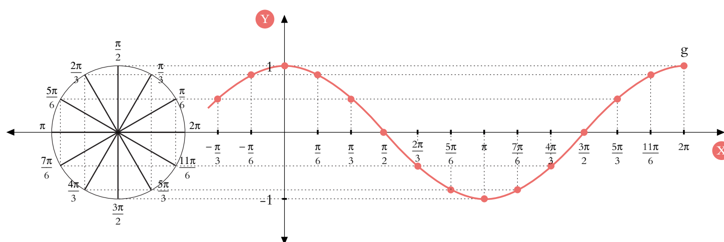
$f(x) = \text{sen } x$ $\quad g(x) = \cos x$ $\quad h(x) = \text{tg } x$

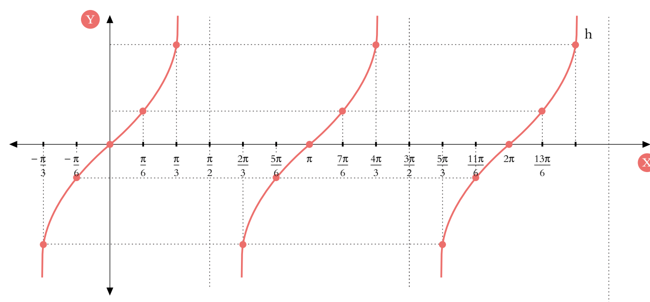
Analicemos el dominio y la imagen de las funciones f(x) y g(x):
Si observamos la circunferencia trigonométrica,



podemos ver que los valores de x_P e y_P de los puntos P pertenecientes a esta circunferencia toman sólo valores entre –1 y 1, en los cuatro cuadrantes. Esto ocurre porque al pertenecer todos los puntos P a la circunferencia de radio 1, sus coordenadas son menores que este valor.
Entonces, tanto f(x) = sen x como g(x) = cos x tienen como imagen al intervalo [–1, 1]. Como **x** puede tomar cualquier valor real, estas funciones tienen como dominio al conjunto ℝ.
Observemos sus gráficos:







Algo más...

Fórmulas para la suma de ángulos:

$\text{sen}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \text{sen } \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} + \cos \hat{\alpha} \text{ sen } \hat{\beta}$

$\text{sen}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \text{sen } \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} - \cos \hat{\alpha} \text{ sen } \hat{\beta}$

$\cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \cos \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} - \text{sen } \hat{\alpha} \text{ sen } \hat{\beta}$

$\cos(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \cos \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} + \text{sen } \hat{\alpha} \text{ sen } \hat{\beta}$

$\text{tg}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \dfrac{\text{tg } \hat{\alpha} + \text{tg } \hat{\beta}}{1 - \text{tg } \hat{\alpha} \text{ tg } \hat{\beta}}$

$\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg } \hat{\alpha} - \text{tg } \hat{\beta}}{1 + \text{tg } \hat{\alpha} \text{ tg } \hat{\beta}}$

17. A partir de las fórmulas anteriores, hallen las fórmulas para el doble de un ángulo:

$\text{sen } 2\hat{\alpha} =$

$\cos 2\hat{\alpha} =$

$\text{tg } 2\hat{\alpha} =$

---

18. Demuestren que los valores del seno y del coseno del ángulo de 45º son iguales a $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Algo más...

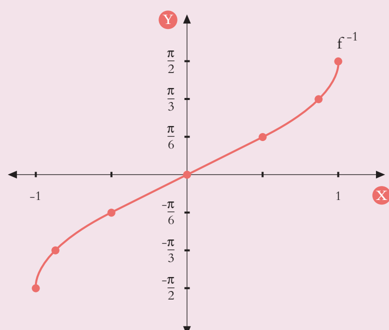
Como las funciones trigonométricas no son biyectivas, si cambiamos los dominios para que lo sean, se puede definir sus inversas:

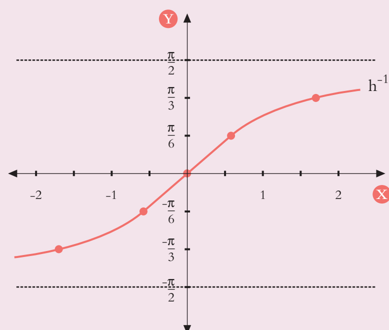
$f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] / f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$

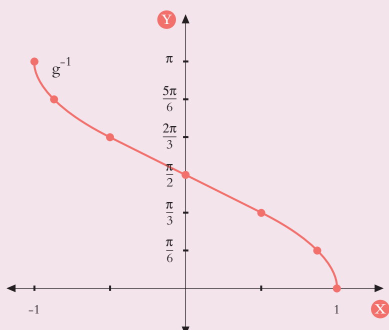
$g^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] / g^{-1}(x) = \text{arccos } x$

$h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] / h^{-1}(x) = \text{arctg } x$

Veamos sus gráficos







Observemos que si en la circunferencia trigonométrica marcamos un ángulo α y otro $\hat{\alpha} + 2\pi$, llegamos al mismo punto; por lo tanto, queda determinado el mismo triángulo rectángulo; entonces:

$\text{sen } \hat{\alpha} = \text{sen } (\hat{\alpha} + 2\pi)$

$\cos \hat{\alpha} = \cos (\hat{\alpha} + 2\pi)$

$\text{tg } \hat{\alpha} = \text{tg } (\hat{\alpha} + 2\pi)$

Lo mismo ocurre cuando sumo o resto cualquier cantidad de giros, lo que es lo mismo que sumarle a $\hat{\alpha}$ un múltiplo de 2π, es decir, $\hat{\alpha} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, las funciones seno, coseno y tangente son periódicas[1], lo que también se observa en el gráfico.

La función seno tiene período 2π, máximos en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

La función coseno tiene período 2π, máximos en $0 + 2k\pi$ y mínimos en $\pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Los ceros de la función seno son $k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), los de la función coseno son $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), y los de la función tangente son $k\pi$ con ($k \in \mathbb{Z}$).

La función tangente tiene como dominio al conjunto

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

porque al estar definida como el cociente entre el seno y el coseno, este último debe ser distinto de 0. Como podemos ver en el gráfico, tiene infinitas asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propiedades

Como las funciones trigonométricas no son inyectivas, ni siquiera si tomamos como dominio a $[0, 2\pi]$, hay diferentes valores de la variable independiente a los cuales les corresponde un mismo valor de variable dependiente; analicemos cuáles son. Si α es un ángulo del primer cuadrante:

[1] Ver Libro 1, página 21.

Los triángulos formados en cada cuadrante son congruentes y los puntos P y P’ tienen el mismo valor en las ordenadas y sus abscisas son números opuestos, por lo tanto:

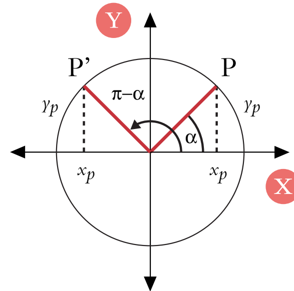
sen $\hat{\alpha}$ = sen (π – $\hat{\alpha}$) cos $\hat{\alpha}$ = – cos (π – $\hat{\alpha}$) tg $\hat{\alpha}$ = – tg (π – $\hat{\alpha}$)

Por ejemplo:

$\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3}$

$\cos\ \frac{2\pi}{3} = -\cos\ \frac{\pi}{3}$

$\text{tg}\ \frac{2\pi}{3} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{3}$



Si tomamos un ángulo α del tercer cuadrante:

Los triángulos formados en cada cuadrante también son congruentes y los puntos P y P’’ tienen tanto la ordenada como la abscisa opuestas, por lo tanto:

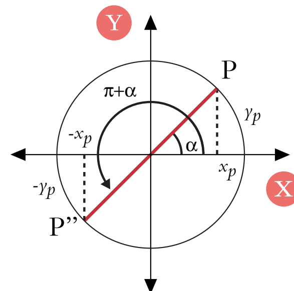
sen (π + $\hat{\alpha}$) = – sen $\hat{\alpha}$ cos (π + $\hat{\alpha}$) = – cos $\hat{\alpha}$ tg (π+ $\hat{\alpha}$) = tg $\hat{\alpha}$

Por ejemplo:

$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{3}$

$\cos\ \frac{4\pi}{3} = -\cos\ \frac{\pi}{3}$

$\text{tg}\ \frac{4\pi}{3} = \text{tg}\ \frac{\pi}{3}$



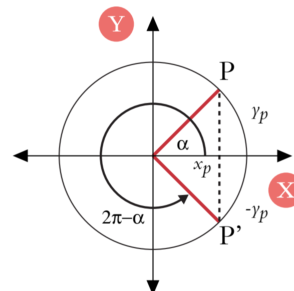
Si consideramos un ángulo α del cuarto cuadrante:

Los triángulos formados en cada cuadrante también son congruentes y los puntos P y P’’’ tienen la misma abscisa pero las ordenadas son opuestas, por lo tanto:

sen (2π – $\hat{\alpha}$) = – sen $\hat{\alpha}$

cos (2π – $\hat{\alpha}$) = cos $\hat{\alpha}$

tg (2π – $\hat{\alpha}$) = – tg $\hat{\alpha}$



Por ejemplo:

$\text{sen}\ \frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{3}$ | $\cos\ \frac{5\pi}{3} = -\cos\ \frac{\pi}{3}$ | $\text{tg}\ \frac{5\pi}{3} = \text{tg}\ \frac{\pi}{3}$

19. Sabiendo que sen 30º = 0,5 y cos 30º = 0,866, utilicen estos datos para hallar:

a. tg 30º = ____________________

b. sen 60º = ____________________

c. cos 60º = ____________________

d. sen 150º = ____________________

e. cos 150º = ____________________

f. sen 330º = ____________________

g. cos 330º = ____________________

h. sen 210º = ____________________

i. cos 210º = ____________________

j. tg 210º = ____________________

20. Sabiendo que sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, utilicen estos datos para hallar:

a. $\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$ = ____________________

b. $\text{sen}\ \frac{3\pi}{4}$ = ____________________

c. $\cos\ \frac{3\pi}{4}$ = ____________________

d. $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4}$ = ____________________

e. $\cos\ \frac{7\pi}{4}$ = ____________________

f. $\text{sen}\ \frac{5\pi}{4}$ = ____________________

g. $\cos\ \frac{5\pi}{4}$ = ____________________

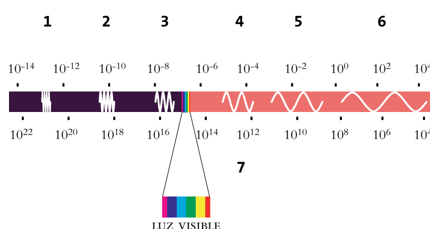
h. $\text{tg}\ \frac{5\pi}{4}$ = ____________________

¿Sabían qué... ?

Las teorías físicas actuales definen a la luz como una onda, más precisamente como una oscilación electromagnética que se propaga en el vacío.

Ya en 1678, Christian Huygens definía a la luz como un movimiento ondulatorio semejante al que se produce con el sonido.
En 1865, James Clerk Maxwell desarrolló la teoría del electromagnetismo según la cual los cambios periódicos de un campo eléctrico y magnético se pueden concebir como una propagación de ondas.
En 1888, Henrich Hertz logró producir ondas por medios exclusivamente eléctricos.
Las investigaciones de Hertz y Maxwell revelaron que todas las radiaciones tienen las mismas propiedades físicas diferenciándose sólo en la longitud de onda.
El modelo matemático que mejor describe estas ondas es el sinusoidal (función seno). Observemos las gráficas de las distintas ondas electromagnéticas.

ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO (en metros)



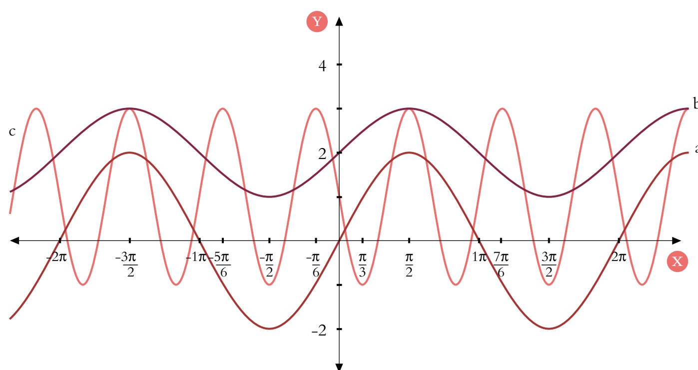
1. RAYOS GAMMA
2. RAYOS X
3. RAYOS ULTRAVIOLETA
4. RAYOS INFRARROJOS
5. MICROONDAS
6. ONDAS DE RADIO
7. FRECUENCIA EN HERTZ

Problema 6

Grafiquen las siguientes funciones, como corrimientos de f(x) = sen x:

a. $f(x) = 2 \, . \operatorname{sen} x$
b. $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$
c. $f(x) = 2 \, . \operatorname{sen} \; (3x + \pi) + 1$

Problema 6



a. Al multiplicar f(x) por 2, la función se "estiró verticalmente" y la imagen en este caso es [–2; 2].

b. Al sumarle 2 a la función, ésta se desplazó verticalmente dos unidades hacia arriba.

c. Para construir este gráfico nos resultará más fácil sacar 3 como factor común en la fórmula, en cuyo caso obtenemos:

$$f(x) = 2 \, . \operatorname{sen} \left[3. \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 1$$

Observamos que la curva de f(x) = sen x, se "desplazó" $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la izquierda, el período se "achicó" 3 veces respecto de $\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$, se "estiró verticalmente" 2 veces, y se desplazó verticalmente 1 unidad hacia arriba.

Para que sea más fácil identificar cada una de las variaciones en el gráfico, le daremos nombres especiales a cada uno de los elementos que la componen.

Si f(x) es una función trigonométrica, se llama **amplitud** de dicha función a la altura de cada onda del gráfico.
La frecuencia de una función del tipo seno o coseno es el número de veces que entra en un intervalo de longitud igual a 2π.
El **ángulo de fase** es el valor donde comienza el ciclo que comenzaba en 0 en la función original.

Las gráficas de $f(x) = \alpha \,.\, \text{sen}\,(a\,x + b) + c$ y $f(x) = \alpha \,.\, \cos\,(a\,x + b) + c$ tienen amplitud $= |\,\alpha\,|$, período $= \frac{2\pi}{|a|}$, frecuencia $= |\,a\,|$, ángulo de fase $= -\frac{b}{a}$

Ecuaciones trigonométricas

Para responder a la pregunta **b.** del problema 4, planteamos la siguiente ecuación:

$$110 = 220 \cos\,(2\pi \,.\, t)$$

De acuerdo con el análisis que hicimos de las funciones trigonométricas, esta ecuación tiene infinitas soluciones, pero ¿cómo hacemos para escribirlas todas?

Sabemos que $\cos\,(2\pi \,.\, t) = 0{,}5$; cuando analizamos el gráfico de la función coseno, dijimos que tiene período 2π; por lo tanto, cada 2π habrá una solución de esta ecuación.

Pero también sabemos que el coseno es positivo tanto en el primero como en el cuarto cuadrante, es decir que tenemos que buscar un ángulo del primer cuadrante cuyo coseno sea 0,5 y otro en el cuarto que cumpla la misma condición.



21. Grafiquen las siguientes funciones:

a. $f(x) = 3\,\text{sen}\,3x$

b. $f(x) = \text{sen}\,3x + 2$

c. $f(x) = 3\,\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

22. En cada uno de los gráficos anteriores, identifiquen la amplitud, el período, la frecuencia y el ángulo de fase.

23. Hallen los valores de **x** que verifican las siguientes ecuaciones:

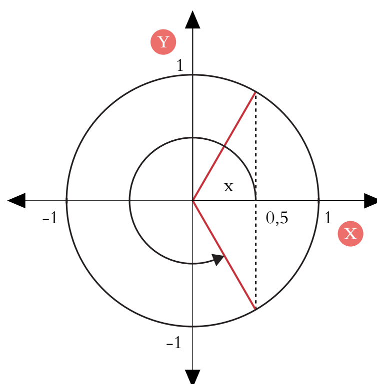
a. $4 \text{ sen } x = 2$

b. $2 \cos x = -2$

c. $3 \text{ sen } x = 1 + 2 \text{ sen } x$

d. $\cos^2 x - 1{,}5 \cos x = 1$

e. $2 \text{ sen}^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$



En la resolución del problema 4, vimos que dichos valores son:

$\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5}{3\pi}$; por lo tanto, las infinitas soluciones son

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $\frac{5}{3\pi}$ + + $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Veamos ahora otro tipo de ecuaciones trigonométricas.

Si tenemos que hallar los valores de **x** que verifican la siguiente igualdad,

$\text{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$ pasamos $\cos^2 x$ al primer miembro.

$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

Si bien tenemos una sola variable, **x**, no podemos resolver esta ecuación tal como está escrita, porque la variable está afectada por el seno y el coseno. Si logramos que **x** aparezca afectada sólo por una de estas funciones, podríamos resolverla. Para cumplir este objetivo, hacemos un cambio de variable utilizando la relación pitagórica. Entonces, reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$:

$\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x) = 1$ extraemos los paréntesis

$\text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = 1$ pasamos de miembro el 1 y sumamos

$2 \,.\, \text{sen}^2 x = 2$ pasamos de miembro el 2

$\text{sen}^2 x = 2 : 2 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow |\text{sen } x| = \sqrt{1}$

$\text{sen } x = +1$ ó $\text{sen } x = -1$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el período de la función seno, las soluciones de esta ecuación son:

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ó $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$



1. En un triángulo isósceles, los ángulos congruentes miden 50º, y el lado distinto, 12 cm. ¿Cuál es el perímetro y el área del triángulo?



2. Los lados de un rombo miden 8 cm, y la diagonal mayor, 5 cm. ¿Cuál es la amplitud de sus ángulos?



3. Si en un triángulo rectángulo un cateto es la cuarta parte de la hipotenusa, ¿cuánto miden los ángulos?



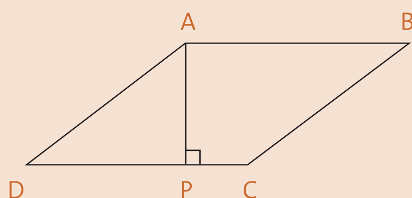
4. Don Luis tiene una escalera de 3 m de longitud. La está utilizando para arreglar una grieta que está a 2,5 m del suelo. ¿Qué amplitud tiene el ángulo que forma la escalera con el piso?

5. María está mirando por la ventana cómo llega su hijo de la escuela. Cuando está parado en el cordón de la vereda de enfrente, lo ve con un ángulo de 40º, y cuando llega al cordón de la vereda de su casa, lo ve con un ángulo de 28º. Si el ancho de la calle es de 15 m, ¿a qué altura está la ventana?



ALUMNO CURSO FECHA

6. Calculen el área y el perímetro del paralelogramo ABCD, sabiendo que $\hat{D} = 37°$, $\overline{AC} = 25$ cm y $\overline{AP} = 18$ cm.

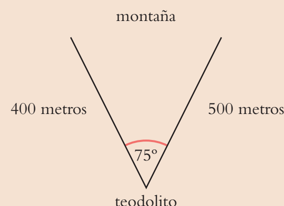


7. En una fábrica necesitan construir una cinta transportadora para llevar la mercadería desde el depósito, en el subsuelo, hasta el salón de ventas, que está en la planta baja. La distancia vertical entre los dos salones es de 2,60 m. Si el ángulo de inclinación de la cinta será de 24º, ¿qué longitud aproximada deberá tener la cinta?

8. Claudio observa un árbol desde la orilla opuesta de un río, mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 43º; retrocede 10 m y mide un nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 35º. ¿Qué altura tiene el árbol?

9. Desde un acantilado se ve un barco. El ángulo que forman la visual y la vertical es de 37°. Cuando el barco se aleja 200 m más desde el acantilado, se ve con un ángulo de 52°. ¿Cuál es la altura del acantilado y a qué distancia se encontraba el barco del acantilado originalmente?

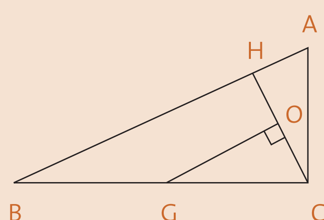
10. Se desea construir un túnel para que una autopista pase debajo de una montaña. Con un teodolito se tomaron las medidas que se ven en el siguiente esquema:



Calculen el ancho que deberá tener el túnel.

11. Una torre de alta tensión está sujeta al piso, a ambos lados, por medio de dos cables fuertes que están unidos a la parte superior de la torre y al piso. Se sabe que los dos puntos donde están sujetos al piso los cables están a 30 m y a 36 m de distancia del pie de la torre, respectivamente, y que los ángulos que forman dichos cables con la horizontal son de 68º y 54º, respectivamente. Calculen la longitud de los cables y la altura de la torre.

12. Calculen el área y el perímetro del triángulo ABC:



$\overline{CH}$ es la altura correspondiente a $\overline{AB}$

$\overline{GO}$ // $\overline{BA}$

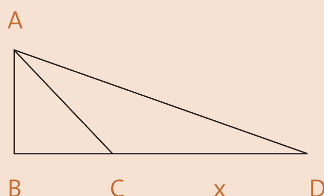
$\overline{GO}$ = 34 cm

$A\hat{B}C$ = 39°

$B\hat{A}C$ = 54º

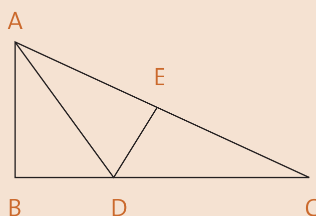
$\overline{BH}$ = 50 cm

13. Hallen el valor de **x** sabiendo que:



$\overline{AB} = 8{,}5$ cm
$A\hat{C}B = 43º$
$A\hat{D}C = 34º$

14. Hallen **x** e **y** sabiendo que



$A\hat{C}B = 23º$
$\overline{BD} = x$
$\overline{AB} = 25$ cm
$B\hat{D}A = 52º$
$\overline{DE} = y$
$C\hat{E}D = 90º$

15. Verifiquen las siguientes identidades:

a. $\text{sen}\,\hat{\alpha}\,.\,\text{cotg}\,\hat{\alpha}\,.\,\sec\hat{\alpha} = 1$
$(\cos\hat{\alpha} \neq 0;\ \text{sen}\,\hat{\alpha} \neq 0)$

b. $\cos\hat{\alpha} + \cos\hat{\alpha}\,.\,\text{tg}^2\,\hat{\alpha} = \sec\hat{\alpha}$
$(\cos\hat{\alpha} \neq 0)$

c. $(\text{sen}\,\hat{\alpha} - \cos\hat{\alpha})\,.\,(\text{cosec}\,\hat{\alpha} + \sec\hat{\alpha}) = \text{tg}\,\hat{\alpha} - \text{cotg}\,\hat{\alpha}$
$(\cos\hat{\alpha} \neq 0;\ \text{sen}\,\hat{\alpha} \neq 0)$

d. $\sec^2\hat{\alpha} - 3 = \text{tg}^2\hat{\alpha} - 2$
$(\cos\hat{\alpha} \neq 0)$

16. Hallen los valores de **x** que verifican:

a. $5 \text{ sen } x = 1$

b. $3 \cos x = -3$

c. $5 - 4 \text{ tg } x = 10$

d. $\text{sen}^2 x = 1$

e. $6 \cos x = 0$

f. $\cos^2 x - \cos x = 1$

g. $4 \text{ tg}^2 x - 3 \sec^2 x = 0$

h. $2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0$

i. $\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 2 = 0$

j. $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$

k. $2 \text{ sen}^2 x + 1 = 3 \text{ sen } x$

l. $2 \cos^2 x + 1 = 3 \cos x$

17. Grafiquen las siguientes funciones. Para cada una de ellas indiquen dominio, imagen, ángulo de fase, amplitud, período y frecuencia.

a. $y = 2 \cos x$

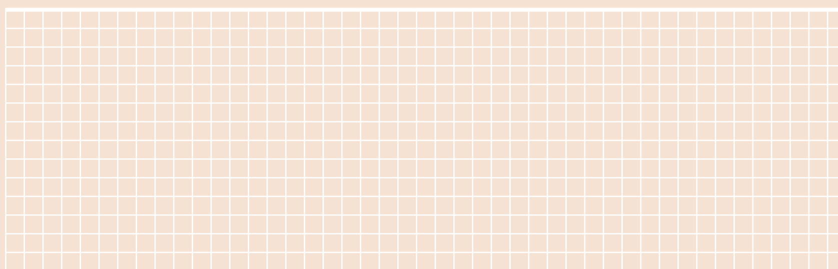
b. $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

c. $y = \cos^2 x$

d. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$

e. $y = 2 \cos (x + p) + 1$

f. $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$



18. Escriban la fórmula de una función seno con los siguientes datos:

amplitud = 2 período = π frecuencia = 3 ángulo de fase = $\frac{\pi}{3}$

19. Escriban la fórmula de una función coseno con los siguientes datos:

amplitud = $\frac{1}{2}$ período = $\frac{\pi}{2}$ frecuencia = 4 ángulo de fase = $\frac{\pi}{5}$

20. Se ha estudiado que la temperatura promedio diaria de cierta región está dada por la siguiente fórmula: $y = 12 + \cos\left(\frac{2\pi}{360} \cdot (t - 120)\right)$

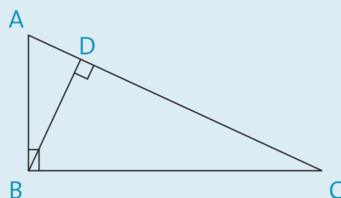
siendo **y** el promedio de temperatura diaria para esa región (en grados centígrados) y **t**, el día del año, considerando t = 1 al primero de enero.

a. ¿Cuál es la temperatura promedio máxima en esta región? ¿Y la mínima?

b. ¿Cada cuántos días, aproximadamente, se repite la misma temperatura promedio?

ALUMNO CURSO FECHA

1. Hallar el perímetro de los triángulos ADB y ABC.



$\overline{AB} = 10cm$

$A\hat{C}B = 23°$

2. Sabiendo que sen 50º = 0,766 y cos 50º = 0,6428, hallar:

a. sen 130º = ____________

b. cos 310º= ____________

c. tg 230º = ____________

3. Se sabe que $\frac{\pi}{2} < \hat{a} < \hat{p}$. Indicar cuál de los siguientes pares de números pueden corresponder al seno y la tangente de $\hat{a}$. Justificar la respuesta.

a. $-\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{3}}$ **b.** $\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{3}}$ **c.** $-\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{3}}$ **d.** $\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{3}}$

4. Juan observa un árbol que está en la orilla opuesta de un río, mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35º. Pedro, que está 10 m más lejos de la orilla que Juan, mide un ángulo de 55º. ¿Qué altura tiene el árbol?

5. Las hojas de una escalera están unidas por una cadena que tiene 1,5 m de longitud ubicada en la mitad; cuando la escalera está totalmente abierta, sus hojas forman con el piso ángulos de 55º 58'. ¿Cuál es la altura que alcanza la escalera? ¿Cuál es el alto de cada una de las hojas de la escalera?

ALUMNO CURSO FECHA

6. Hallar los valores de **x** que verifican las siguientes ecuaciones:

a. $4 \text{ sen } x - 2 = 0$

b. $2 \cdot \cos^2 x - \text{sen } x = 1$

7. Verificar las siguientes identidades:

a. $\sec^2 \hat{\alpha} - 3 = \text{tg}^2 \hat{\alpha} - 2$

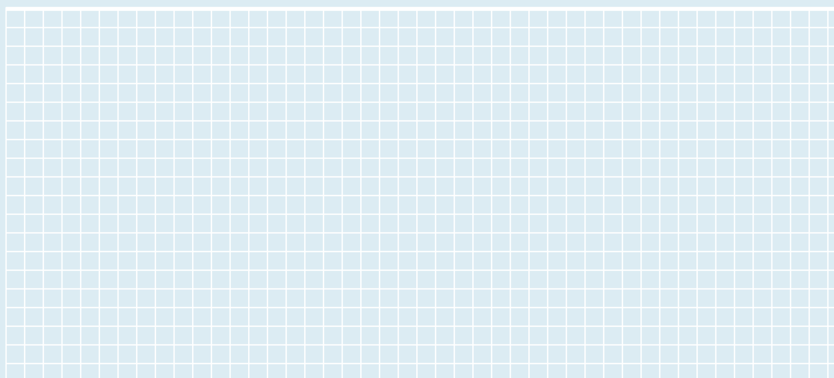
b. $(\text{sen } \hat{\alpha} - \text{cosec } \hat{\alpha})^2 = \text{cotg}^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \hat{\alpha}$

8. Graficar las siguientes funciones.

a. $y = \cos 3x$

b. $y = \cos x$

c. $y = 2 \cos (3x + 2\pi)$



ALUMNO

CURSO

FECHA

Respuestas
Guías de autoevaluación

Capítulo 1

1. a. 5
b. 5
c. 8

2. a. No es posible, depende de los coeficientes.
b. No es posible, depende de los coeficientes.
c. 10.

3. a. Falso. Es 3 la diferencia entre los grados de P(x) y Q(x).
b. Falso. Es el polinomio nulo.
c. Verdadero. $K(x) = 7x^2 + x - 2$

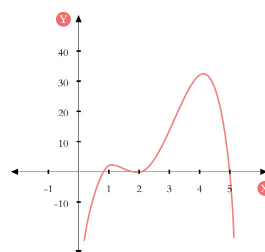
4. a. III. Porque 3 es raíz y $\forall\, x > 3$, $f(x) < 0$.
b. III. Porque $\sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{3}$, 2 y −2 son las raíces.

5. $= \frac{9}{2}$

6. a. $f(x) = 5\,(x-4)\,(x+4)\,(x-3)\,(x+3)$
b. $P(x) = 5\,(x-3)\,(x+3-2\sqrt{x}\,)$ $(x+3+2\sqrt{x}\,)$

7. a. Grado 4.
b. $P(x) = -\frac{12}{5}\left(x+2\right)^2\left(x-5\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

c. −2 raíz doble; 5 y $\frac{3}{4}$
d.



8. Hay muchas soluciones. Una de ellas es:

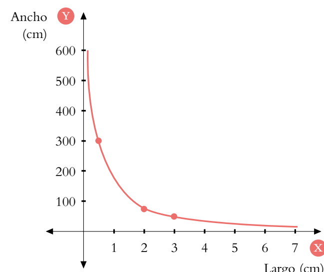
$f(x) = -\frac{1}{48}\,(x+3)\,(x+2)\,(x-4)^6\,(x-8)$

Capítulo 2

1. a.

Largo del rectángulo (cm)	10	15	25	5	2
Ancho del rectángulo (cm)	15	10	6	30	75

b. $y = \frac{150}{x}$
c.



2. a. b. Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$, Im $f = \mathbb{R} - \{-2\}$,

as. vertical $x = 1$, as. horizontal $y = -2$;

raíz $x = \frac{3}{2}$; ordenada al origen $y = -3$.

Dom $g = \mathbb{R} - \{2\}$; Im $g = \left(\frac{3}{2}\right)$, as.

vertical $x = 2$, as. horizontal $y = \frac{3}{2}$;

raíz no tiene; ordenada al origen $y = \frac{3}{2}$.

c. Intersección $\left(\frac{9}{7}; \frac{3}{2}\right)$

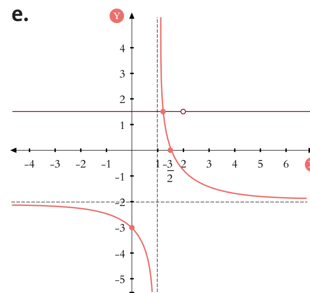
d. $f(x)$: $C^+ = \left(1; \frac{3}{2}\right)$

$C^- = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ decrece

$(-\infty, 1) \cup (1; +\infty)$, $g(x)$: $C^+ =$

$= (-\infty, 2) \cup (2; +\infty)$ no crece ni decrece

e.



3. a. $S = \left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \cup (1, +\infty)$

b. $S = (0, +\infty)$

c. (1, 4)

Respuestas
Guías de autoevaluación

Capítulo 3

1. a. $m = 132{,}29 \cdot 1{,}00345^t$ m en gramos y **t** en horas.
b. 0,345% por hora; 8,617% por día; 78,35% por semana.
c. Cada 8 días, 9 horas y 15,5 minutos.
d. Después de 587,3177 horas.

2. a. $m = 1{,}5182 \cdot 0{,}9762^t$ m en kg y **t** en años.
b. 2,38% por año; 0,2% por mes; 21,41% por década; 91% por siglo.
c. 46,109 años.

3. a. x = 7
b. x = 5
c. x = 3 ó x = 1,75
d. x = 0,2361
e. x = 4,72

4. a. =
b. >
c. <
d. >

5. Por ejemplo $y = -3 \cdot 2^x$

Capítulo 4

1. Perímetro $\overset{\triangle}{ABD}$ = 23,11 cm;
perímetro $\overset{\triangle}{ABC}$=59,15 cm.

2. a. 0,766.
b. 0,6428.
c. 1,1917.

3. b.

4. 13,74 m.

5. Altura de la escalera: 2,82 m;
alto de las hojas: 3,19 m.

6. a. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ó

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

7. a. $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 3 = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 2$

$$\frac{1 - 3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

b. $\text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{cosec}\,\alpha + \text{cosec}^2\,\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$$\text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

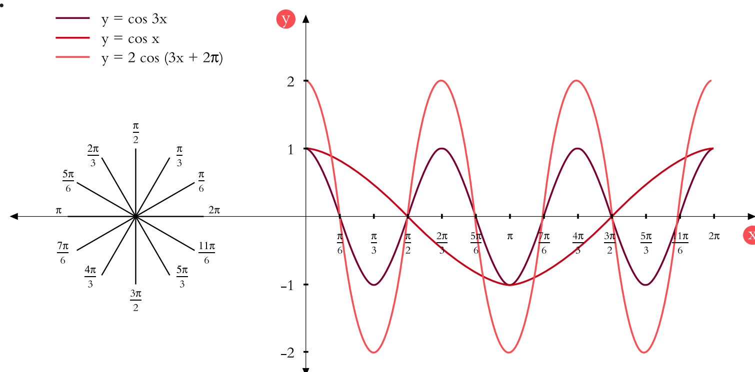
$$\frac{\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}^2\alpha + 1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{(1 - \cos^2\alpha)\,\text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}^2\alpha + 1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}^2\alpha + 1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{-\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha + 1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

8.



Notas

Notas

Notas

Esta edición se terminó
de imprimir en los talleres de Longseller,
Buenos Aires, Argentina,
en el mes de febrero de 2002.